

Teoria della misura e applicazioni geodetiche

La teoria della misura rappresenta uno dei pilastri fondamentali dell'analisi matematica moderna. Nata dalle esigenze di fornire una base rigorosa al calcolo integrale, essa ha trovato applicazioni che vanno ben oltre il contesto puramente matematico, permeando discipline come la probabilità, la fisica teorica, l'economia matematica e, come esploreremo in questo trattato, la geodesia e la cartografia.

Il problema che la teoria della misura si propone di risolvere è apparentemente semplice: come assegnare una "dimensione" o "grandezza" a sottoinsiemi di uno spazio? Per insiemi semplici come rettangoli o parallelepipedi, la risposta è immediata. Ma cosa accade quando ci troviamo di fronte a insiemi con frontiere frastagliate, come il percorso del moto browniano, o insiemi definiti attraverso processi limite infiniti? E come possiamo estendere questi concetti a spazi astratti che non hanno una struttura geometrica evidente?

Queste domande filosofiche e tecniche hanno trovato risposta nell'opera di matematici come Émile Borel, Henri Lebesgue, Johann Radon, Constantin Carathéodory e molti altri nel corso del primo terzo del XX secolo. La loro costruzione intellettuale non solo ha risolto problemi tecnici dell'integrazione, ma ha aperto nuove prospettive sul significato stesso di "misurare" e "integrare".

IL PROBLEMA DELLA MISURA

1.1 Motivazioni Storiche e Concettuali

La necessità di "misurare" è antica quanto la civiltà umana. Gli antichi Egizi svilupparono tecniche per misurare i campi dopo le inondazioni del Nilo, i Greci si interrogarono sulla quadratura del cerchio, e la nascita del calcolo differenziale nel XVII secolo pose con urgenza il problema di calcolare aree sotto curve e volumi di solidi di rivoluzione.

Il calcolo integrale di Newton e Leibniz fornì strumenti potenti ma, dal punto di vista logico, poggiava su fondamenta poco solide. L'integrale di Riemann, sviluppato nel XIX secolo, rappresentò un primo tentativo di rigorizzazione. Tuttavia, l'integrale riemanniano presenta limitazioni fondamentali:

Limitazione 1: Comportamento rispetto ai limiti

Consideriamo la funzione caratteristica dei razionali in $[0,1]$:

$$f(x) = 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$f(x) = 0 \text{ se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$$

Questa funzione non è integrabile secondo Riemann, poiché in ogni intervallo $[a,b]$ l'estremo superiore delle somme inferiori è 0 mentre l'estremo inferiore delle somme superiori è $b-a$. Eppure, dal punto di vista "intuitivo", i razionali sono "pochi" rispetto ai reali (sono numerabili), quindi dovremmo aspettarci che l'integrale sia 0.

Limitazione 2: Teoremi di passaggio al limite

Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni Riemann-integrabili che converge puntualmente a f , la funzione limite f potrebbe non essere Riemann-integrabile. Questo rende difficile lavorare con successioni di funzioni, una necessità fondamentale in analisi.

Limitazione 3: Completezza

Lo spazio delle funzioni Riemann-integrabili non è completo rispetto a nessuna metrica naturale. Questo limita l'applicazione di tecniche di analisi funzionale.

Questi problemi motivarono Henri Lebesgue a ripensare radicalmente il concetto di integrazione. La sua intuizione fondamentale fu di "partizionare l'asse dei valori" invece dell'asse delle variabili. Ma per implementare questa idea, occorre prima sviluppare una teoria generale della misura.

1.2 Il Concetto Primitivo di "Misura"

Cosa significa "misurare" un insieme? Intuitivamente, vogliamo assegnare a ogni sottoinsieme A di uno spazio X un numero $\mu(A) \geq 0$ che rappresenti la sua "grandezza". Questo numero dovrebbe soddisfare proprietà naturali:

1. **Normalizzazione:** L'insieme vuoto ha misura zero: $\mu(\emptyset) = 0$
2. **Additività:** Se A e B sono disgiunti, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
3. **Monotonia:** Se $A \subseteq B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$

Queste proprietà sembrano innocue, ma nascondono difficoltà profonde. Consideriamo $\mathbb{R}$ come spazio. Vorremmo che:

- $\mu([a, b]) = b - a$ (lunghezza dell'intervallo)
- La misura sia invariante per traslazioni: $\mu(A + x) = \mu(A)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Teorema (Paradosso di Vitali, 1905): Non esiste una misura μ definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sia contemporaneamente σ -additiva, invariante per traslazioni, e tale che $\mu([0, 1]) = 1$.

Questo risultato, dimostrato da Giuseppe Vitali, fu uno shock per la comunità matematica. Esso mostra che non possiamo misurare "tutti" i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ se vogliamo proprietà ragionevoli. La soluzione è restringere l'attenzione a una famiglia "sufficientemente ricca ma non troppo" di sottoinsiemi misurabili.

1.3 L'Approccio delle σ -Algebre

La risposta al paradosso di Vitali è di identificare a priori una famiglia F di sottoinsiemi di X che saranno gli "insiemi misurabili". Questa famiglia deve essere sufficientemente grande da contenere tutti gli insiemi di interesse pratico, ma abbastanza controllata da permettere l'esistenza di una misura con buone proprietà.

Le proprietà minime che richiediamo a F sono quelle di una **σ -algebra** (o tribù):

Definizione 1.1 (σ -Algebra)

Sia X un insieme. Una famiglia F di sottoinsiemi di X è una σ -algebra su X se soddisfa:

(SA1) $X \in F$

(SA2) Se $A \in F$, allora $A^c \in F$

(SA3) Se $A_1, A_2, A_3, \dots \in F$ (successione numerabile), allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

La coppia (X, F) è detta **spazio misurabile**.

Osservazioni importanti:

La richiesta (SA3) di chiusura per unioni numerabili (invece che finite) è cruciale. Essa permette di lavorare con processi limite, che sono onnipresenti in analisi. La numerabilità è un compromesso: operazioni finite sono troppo restrittive, operazioni su famiglie non numerabili porterebbero a contraddizioni (come mostra il paradosso di Vitali).

Proposizione 1.1: Ogni σ -algebra contiene l'insieme vuoto.

Dimostrazione: Per (SA1), $X \in F$. Applicando (SA2) con $A = X$, otteniamo $X^c = \emptyset \in F$. ■

Proposizione 1.2: Una σ -algebra è chiusa per intersezioni numerabili.

Dimostrazione: Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in F . Per (SA2), ciascun $A_n^c \in F$. Per (SA3), $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in F$. Applicando nuovamente (SA2) e usando la legge di De Morgan:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in F \quad \blacksquare$$

Proposizione 1.3: Una σ -algebra è chiusa per differenze: se $A, B \in F$, allora $A \setminus B \in F$.

Dimostrazione: $A \setminus B = A \cap B^c$. Poiché $B \in F$, per (SA2) abbiamo $B^c \in F$. Quindi $A \setminus B = A \cap B^c$ è l'intersezione di due elementi di F , quindi appartiene a F per la Proposizione 1.2. ■

Proposizione 1.4: Una σ -algebra è chiusa per unioni e intersezioni finite.

Dimostrazione: Dati $A_1, \dots, A_n \in F$, definiamo $A_k = \emptyset$ per $k > n$. Allora $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in F , e $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in F$ per (SA3). Analogamente per le intersezioni. ■

Queste proposizioni mostrano che le σ -algebre hanno una struttura algebrica ricca: sono chiuse rispetto a tutte le operazioni insiemistiche "ragionevoli".

1.4 Esempi Fondamentali di σ -Algebre

Esempio 1.1 (σ -algebra banale): Data qualsiasi insieme X , la famiglia $F = \{\emptyset, X\}$ è una σ -algebra. Verifichiamo:

- (SA1): $X \in F$ per costruzione
- (SA2): $\emptyset^c = X \in F$ e $X^c = \emptyset \in F$
- (SA3): Ogni unione di elementi di F è $\emptyset$, X , o X , quindi appartiene a F

Questa σ -algebra è troppo povera per applicazioni interessanti.

Esempio 1.2 (σ -algebra massimale): La famiglia $P(X)$ di tutti i sottoinsiemi di X è una σ -algebra. Questa è troppo ricca: come mostra il paradosso di Vitali, su $P(\mathbb{R})$ non esiste una misura con le proprietà desiderate.

Esempio 1.3 (σ -algebra generata da una partizione): Sia $\{E_i\}_{i \in I}$ una partizione di X (cioè $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e $\bigcup_{i \in I} E_i = X$). La famiglia di tutte le unioni di elementi della partizione forma una σ -algebra. Questa rappresenta situazioni con un numero finito o numerabile di "stati" distinguibili.

Esempio 1.4 (σ -algebra di Borel su $\mathbb{R}$): Questo è l'esempio più importante per le applicazioni. La σ -algebra di Borel $B(\mathbb{R})$ è la più piccola σ -algebra contenente tutti gli intervalli aperti (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, è la σ -algebra generata da una delle seguenti famiglie (che risultano essere equivalenti):

- Intervalli aperti (a, b)
- Intervalli chiusi $[a, b]$
- Intervalli semiaperti $[a, b)$, $(a, b]$
- Intervalli illimitati $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$

La costruzione precisa verrà discussa nella prossima sezione.

1.5 σ -Algebra Generata

Un concetto fondamentale è quello di σ -algebra generata da una famiglia di insiemi.

Definizione 1.2 (σ -Algebra Generata): Sia A una famiglia di sottoinsiemi di X . La σ -algebra generata da A , denotata $\sigma(A)$, è la più piccola σ -algebra contenente A . Formalmente:

$$\sigma(A) = \bigcap \{F : F \text{ è } \sigma\text{-algebra su } X \text{ e } A \subseteq F\}$$

Questa definizione richiede alcune giustificazioni:

Lemma 1.1: L'intersezione di σ -algebre è una σ -algebra.

Dimostrazione: Sia $\{F_i\}_{i \in I}$ una famiglia di σ -algebre su X , e sia $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Verifichiamo gli assiomi:

(SA1): Per ogni $i \in I$, $X \in F_i$ (poiché F_i è σ -algebra). Quindi $X \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$.

(SA2): Sia $A \in F$. Allora $A \in F_i$ per ogni $i \in I$. Poiché ciascun F_i è σ -algebra, $A^c \in F_i$ per ogni i . Quindi $A^c \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$.

(SA3): Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in F . Allora per ogni n e ogni i , $A_n \in F_i$. Poiché ciascun F_i è σ -algebra, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F_i$ per ogni i . Quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$. ■

Corollario 1.1: La famiglia $\{F : F \text{ è } \sigma\text{-algebra su } X \text{ e } A \subseteq F\}$ è non vuota (contiene $P(X)$), quindi la definizione di $\sigma(A)$ è ben posta.

Proposizione 1.5: La σ -algebra generata $\sigma(A)$ gode delle seguenti proprietà:

1. $A \subseteq \sigma(A)$
2. $\sigma(A)$ è una σ -algebra
3. Se F è una σ -algebra con $A \subseteq F$, allora $\sigma(A) \subseteq F$ (proprietà di minimalità)

Dimostrazione:

1. Per costruzione, $\sigma(A)$ è l'intersezione di tutte le σ -algre contenenti A , quindi certamente $A \subseteq \sigma(A)$.
2. Segue dal Lemma 1.1.
3. Se F è σ -algebra con $A \subseteq F$, allora F appartiene alla famiglia di cui $\sigma(A)$ è l'intersezione, quindi $\sigma(A) \subseteq F$. ■

1.6 La σ -Algebra di Borel

La σ -algebra di Borel su $\mathbb{R}$ (e per estensione su $\mathbb{R}^n$) è di importanza centrale sia in teoria che nelle applicazioni.

Definizione 1.3: La σ -algebra di Borel su $\mathbb{R}$, denotata $B(\mathbb{R})$, è la σ -algebra generata dalla famiglia di tutti gli intervalli aperti:

$$B(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\})$$

Teorema 1.1: Le seguenti famiglie generano la stessa σ -algebra di Borel $B(\mathbb{R})$:

1. Gli intervalli aperti $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$
2. Gli intervalli aperti illimitati $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$
3. Gli intervalli chiusi $\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$
4. Gli intervalli semiaperti $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

Dimostrazione (schema): Mostriamo che ciascuna famiglia è contenuta nella σ -algebra generata dalle altre, implicando l'uguaglianza.

(1) $\Rightarrow$ (2): Ogni intervallo $(-\infty, a)$ può essere scritto come: $(-\infty, a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, a)$

Poiché ciascun $(-n, a)$ è in $\sigma(\{(a,b)\})$ e le σ -algre sono chiuse per unioni numerabili, $(-\infty, a) \in \sigma(\{(a,b)\})$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ogni intervallo aperto (a,b) può essere scritto come: $(a,b) = (-\infty, b) \cap ((-\infty, a))^c = (-\infty, b) \cap [a, +\infty)$

Questo è l'intersezione di elementi di $\sigma(\{(-\infty, a)\})$, quindi appartiene a tale σ -algebra.

(1) $\Rightarrow$ (3): Un intervallo chiuso $[a,b]$ può essere approssimato da intervalli aperti: $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b + 1/n)$

Quindi $[a,b]$ appartiene a $\sigma(\{(a,b)\})$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Un intervallo aperto (a,b) è il complemento di $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, che è unione numerabile di intervalli chiusi, quindi appartiene a $\sigma(\{[a,b]\})$.

Gli altri casi si dimostrano in modo analogo. ■

Proprietà degli Insiemi di Borel:

Gli insiemi in $B(\mathbb{R})$ sono detti **insiemi di Borel** o **boreliani**. Essi includono:

- Tutti gli intervalli (aperti, chiusi, semiaperti, illimitati)
- Tutti gli insiemi aperti e chiusi di $\mathbb{R}$
- Tutti gli insiemi numerabili (unioni numerabili di singoletti)
- Il complemento di qualsiasi boreliano
- Unioni e intersezioni numerabili di boreliani

Tuttavia, non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono boreliani. La famiglia $B(\mathbb{R})$ è "molto più piccola" di $P(\mathbb{R})$ in senso cardinale: mentre $|P(\mathbb{R})| = 2^c$ (dove c è la cardinalità del continuo), si può dimostrare che $|B(\mathbb{R})| = c$.

Esempio 1.5 (Insieme di Cantor): L'insieme di Cantor $C \subset [0,1]$ è un boreliano. Si costruisce per rimozione successiva:

- $C_0 = [0,1]$
- $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ (rimuoviamo il terzo centrale)
- $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$
- ...
- $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$

Ogni C_n è unione finita di intervalli chiusi, quindi è in $B(\mathbb{R})$. L'insieme di Cantor C , essendo intersezione numerabile, appartiene a $B(\mathbb{R})$.

1.7 σ -Algebre Prodotto

Per costruire spazi di misura multidimensionali, abbiamo bisogno di σ -algebre prodotto.

Definizione 1.4: Siano (X, F) e (Y, G) spazi misurabili. La σ -algebra prodotto $F \otimes G$ su $X \times Y$ è la σ -algebra generata dai "rettangoli misurabili":

$$F \otimes G = \sigma(\{A \times B : A \in F, B \in G\})$$

Proposizione 1.6: Un insieme $E \subseteq X \times Y$ appartiene a $F \otimes G$ se e solo se per ogni $(x, y) \in X \times Y$ esistono successioni $\{A_n\} \subset F$ e $\{B_n\} \subset G$ tali che E può essere espresso tramite operazioni numerabili di unione, intersezione e complemento a partire dai rettangoli $A_n \times B_n$.

Esempio 1.6: La σ -algebra di Borel su $\mathbb{R}^2$ coincide con il prodotto:

$$B(\mathbb{R}^2) = B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R})$$

Più in generale, $B(R^n) = B(R) \otimes \dots \otimes B(R)$ (n volte).

MISURE E SPAZI DI MISURA

2.1 Definizione Assiomatica di Misura

Ora che abbiamo identificato quali insiemi vogliamo misurare (gli elementi di una σ -algebra F), possiamo definire rigorosamente il concetto di misura.

Definizione 2.1 (Misura): Sia (X, F) uno spazio misurabile. Una funzione $\mu: F \rightarrow [0, +\infty]$ è detta **misura** se soddisfa:

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$ (normalizzazione)

(M2) Per ogni successione $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi in F mutuamente disgiunti (cioè $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$):

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(σ -additività o additività numerabile)

La terna (X, F, μ) è detta **spazio di misura**.

Osservazioni critiche:

1. La misura può assumere il valore $+\infty$. Questo è necessario per misure come quella di Lebesgue su $\mathbb{R}$ (che assegna misura infinita a $\mathbb{R}$ stesso) o la misura di conteggio su insiemi infiniti.
2. La σ -additività è più forte della semplice additività finita. Essa codifica la proprietà che "la misura è insensibile al modo in cui un insieme è decomposto in parti numerabili".
3. La condizione (M1) $\mu(\emptyset) = 0$ non è ridondante: senza di essa, la funzione costante $\mu(A) = +\infty$ soddisferebbe (M2) ma non sarebbe una misura sensata.

Lemma 2.1 (Additività finita): Se μ è una misura e $A_1, \dots, A_n$ sono disgiunti, allora:

$$\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

Dimostrazione: Definiamo $A_k = \emptyset$ per $k > n$. Allora $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di insiemi disgiunti in F . Per σ -additività:

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) &= \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(\emptyset) \\ &= \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2 Proprietà Fondamentali delle Misure

Le seguenti proprietà derivano direttamente dagli assiomi ma sono cruciali per tutti i ragionamenti successivi.

Teorema 2.1 (Monotonia): Sia μ una misura su (X, F) . Se $A, B \in F$ con $A \subseteq B$, allora:

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

Inoltre, se $\mu(A) < \infty$, allora $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Dimostrazione: Possiamo scrivere B come unione disgiunta:

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

Poiché A e $B \setminus A$ sono disgiunti, per additività (Lemma 2.1):

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

essendo $\mu(B \setminus A) \geq 0$. Se $\mu(A) < \infty$, possiamo sottrarre da entrambi i lati per ottenere $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. ■

Teorema 2.2 (Sottoσ-additività): Per ogni successione $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in F (non necessariamente disgiunta):

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Dimostrazione: Costruiamo una successione di insiemi disgiunti con la stessa unione. Definiamo:

$$B_1 = A_1 \quad B_n = A_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) \text{ per } n \geq 2$$

Gli insiemi B_n sono mutuamente disgiunti per costruzione, e inoltre:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Poiché $B_n \subseteq A_n$, per monotonia $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$. Quindi:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \blacksquare$$

Questa proprietà è fondamentale: mostra che la misura di un'unione è al più la somma delle misure, con uguaglianza quando gli insiemi sono disgiunti.

Teorema 2.3 (Continuità dal basso): Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione crescente di insiemi in F (cioè $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$), allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Dimostrazione: Definiamo $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ per $n \geq 2$. Gli insiemi B_n sono disgiunti e:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Inoltre, $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$. Per σ -additività:

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{n=1}^N B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) \quad \blacksquare$$

Questa proprietà esprime che la misura è "continua rispetto a limiti crescenti". È essenziale per molte dimostrazioni nella teoria della misura e dell'integrazione.

Teorema 2.4 (Continuità dall'alto): Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi in $\mathcal{F}$ (cioè $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$) e $\mu(A_1) < \infty$, allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Dimostrazione: Definiamo $B_n = A_1 \setminus A_n$. Allora $\{B_n\}$ è crescente, poiché A_n è decrescente. Inoltre:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Per continuità dal basso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \mu(A_1 \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n))$$

Poiché $\mu(A_1) < \infty$, possiamo usare $\mu(A_1 \setminus C) = \mu(A_1) - \mu(C)$ per ogni $C \subseteq A_1$:

$$\mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

Quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$. $\blacksquare$

Attenzione: La condizione $\mu(A_1) < \infty$ è essenziale. Controesempio: Su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ con λ misura di Lebesgue, sia $A_n = [n, +\infty)$. Allora A_n è decrescente, $\lambda(A_n) = +\infty$ per ogni n , ma $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ con $\lambda(\emptyset) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = +\infty$.

COSTRUZIONE DI MISURE

3.1 Il Problema della Costruzione

Nei capitoli precedenti abbiamo definito assiomaticamente le misure. Ma come si costruiscono concretamente misure con proprietà desiderate? Il problema fondamentale è:

Dato: Una famiglia di insiemi "semplici" con una nozione intuitiva di "dimensione"

Obiettivo: Estendere questa nozione a una σ -algebra completa mantenendo le proprietà di misura

Questo è esattamente ciò che Carathéodory risolse con eleganza.

3.2 Misure Esterne

Definizione 3.1 (Misura Esterna): Una funzione $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura esterna se soddisfa:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Monotonia: $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. Subaddittività numerabile: $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

Osservazione critica: Una misura esterna è definita su TUTTI i sottoinsiemi di X , ma NON è necessariamente additiva (neanche per insiemi disgiunti).

3.3 Il Criterio di Carathéodory

Come identificare gli insiemi su cui μ^* è effettivamente una misura?

Definizione 3.2 (Insieme μ^* -Misurabile):* Un insieme $E \subseteq X$ è μ^* -misurabile se per ogni $A \subseteq X$:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Interpretazione geometrica: E "taglia pulitamente" ogni insieme A : la misura esterna di A si decompone esattamente nella somma delle misure esterne delle due parti.

Teorema 3.1 (Teorema di Carathéodory): La famiglia M di tutti gli insiemi μ^* -misurabili è una σ -algebra, e la restrizione di μ^* a M è una misura completa.

Dimostrazione (schema delle parti tecniche):

Parte 1: M è chiusa per complementi

Banale dalla simmetria della condizione di misurabilità.

Parte 2: M è chiusa per unioni finite

Siano $E_1, E_2 \in M$. Dobbiamo mostrare $E_1 \cup E_2 \in M$. Per ogni A :

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \quad [E_1 \text{ misurabile}]$$

Applicando la misurabilità di E_2 al secondo termine: $\mu^*(A \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$

$$\text{Quindi: } \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

Poiché $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)$ e i due insiemi sono disgiunti, per subaddittività (e la disuguaglianza opposta si verifica facilmente):

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2)$$

$$\text{Sostituendo: } \mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

quindi $E_1 \cup E_2 \in M$.

Parte 3 (più delicata): M è chiusa per unioni numerabili

Sia $\{E_i\} \subset M$ una successione disgiunta (riducibile al caso generale). Definiamo $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Per induzione, $F \in M$.

Per ogni A e ogni n : $\mu^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)$ [per additività finita]

Sia $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Poiché F_i è crescente e μ^* è subadditiva:

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$$

D'altra parte, per ogni n , $F_n \subseteq E$, quindi: $\sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) = \mu^*(A \cap F_n) \leq \mu^*(A \cap E)$

Passando al limite $n \rightarrow \infty$: $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) \leq \mu^*(A \cap E)$

Quindi $\mu^*(A \cap E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$.

La parte più tecnica è mostrare che: $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

utilizzando che $F_i \in \mathcal{M}$ e passando al limite. ■

3.4 Costruzione della Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$

Ora applichiamo la teoria di Carathéodory per costruire la misura di Lebesgue.

Passo 1: Definire una premisura sugli intervalli

Per un intervallo $I = (a, b]$ (semiaperto), definiamo: $\ell(I) = b - a$

Passo 2: Costruire la misura esterna

Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, I_i \text{ intervalli} \right\}$$

Cioè: copriamo A con una famiglia numerabile di intervalli e prendiamo l'infimo della somma delle lunghezze.

Proposizione 3.1: λ^* è una misura esterna.

Dimostrazione:

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$: L'insieme vuoto è coperto da intervalli di lunghezza arbitrariamente piccola.
2. Monotonia: Se $A \subseteq B$, ogni copertura di B è anche copertura di A .
3. Subadditività: Sia $\{A_n\}$ una successione. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni n , esistono intervalli $\{I_{n,k}\}_k$ tali che:
 - $A_n \subseteq \bigcup_k I_{n,k}$
 - $\sum_k \ell(I_{n,k}) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon/2^n$

Allora $\{I_{n,k}\}_{n,k}$ è una copertura numerabile di $\bigcup_n A_n$, e: $\lambda^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_{n,k} \ell(I_{n,k}) = \sum_n (\sum_k \ell(I_{n,k})) < \sum_n (\lambda^*(A_n) + \varepsilon/2^n) = \sum_n \lambda^*(A_n) + \varepsilon$

Poiché ε è arbitrario, $\lambda^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \lambda^*(A_n)$. ■

Passo 3: Identificare gli insiemi misurabili

Teorema 3.2: Ogni insieme di Borel è λ^* -misurabile.

Lemma tecnico chiave: Ogni intervallo aperto è λ^* -misurabile.

Dimostrazione del Lemma: Sia $I = (a, b)$ un intervallo aperto. Dobbiamo mostrare che per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A \cap I^c)$$

(l'altra disuguaglianza segue da subadditività).

Se $\lambda^*(A) = +\infty$, la disuguaglianza è banale. Supponiamo $\lambda^*(A) < +\infty$.

Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una copertura $\{J_\alpha\}$ di A con $\sum \ell(J_\alpha) < \lambda^*(A) + \varepsilon$.

Ogni J_α può essere decomposto come: $J_\alpha = (J_\alpha \cap I) \cup (J_\alpha \cap [a, b]^c)$

e per subadditività della lunghezza: $\ell(J_\alpha) \geq \ell(J_\alpha \cap I) + \ell(J_\alpha \cap [a, b]^c)$

(Questa è la parte geometrica cruciale: "tagliare" un intervallo con $[a, b]$.)

Sommando: $\lambda^*(A) + \varepsilon > \sum \ell(J_\alpha) \geq \sum [\ell(J_\alpha \cap I) + \ell(J_\alpha \cap I^c)] \geq \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A \cap I^c)$

Poiché ε è arbitrario, $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(A \cap I^c)$. ■

Dal Lemma e dal Teorema di Carathéodory: $B(\mathbb{R}) \subseteq M$ (la σ -algebra dei misurabili).

Definizione 3.3: La misura di Lebesgue λ su $\mathbb{R}$ è la restrizione di λ^* a M . Gli insiemi in M sono detti Lebesgue-misurabili.

Proprietà fondamentali:

1. $\lambda([a, b]) = b - a$ per ogni intervallo
2. λ è invariante per traslazioni: $\lambda(A + x) = \lambda(A)$
3. λ è una misura di Borel completa
4. $B(\mathbb{R}) \subsetneq M \subsetneq P(\mathbb{R})$ (inclusioni strette!)

3.5 Insiemi Non Misurabili

Teorema 3.3 (Esistenza di insiemi non misurabili): Esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che non sono Lebesgue-misurabili.

Dimostrazione (Costruzione di Vitali):

Definiamo una relazione di equivalenza su $[0, 1]$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

Ogni classe di equivalenza è numerabile e densa in $[0, 1]$. Per l'assioma della scelta, esiste un insieme $V \subseteq [0, 1]$ contenente esattamente un rappresentante da ogni classe.

Affermazione: V non è Lebesgue-misurabile.

Dimostrazione dell'affermazione: Sia $\{r_n\}$ un'enumerazione di $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Definiamo: $V_n = V + r_n = \{v + r_n : v \in V\}$

Proprietà:

1. I V_n sono mutuamente disgiunti (se $v_1 + r_n = v_2 + r_n$ con $v_1, v_2 \in V$, allora $v_1 - v_2 = r_n - r_n = 0$, quindi $v_1 \sim v_2$, quindi $v_1 = v_2$ e $r_n = r_n$)
2. $[0, 1] \subseteq \bigcup_n V_n \subseteq [-1, 2]$ (ogni $x \in [0, 1]$ differisce dal suo rappresentante in V per un razionale)
3. Per invarianza per traslazione, se V fosse misurabile: $\lambda(V_n) = \lambda(V)$ per ogni n

Se V fosse misurabile: $\lambda([0, 1]) \leq \lambda(\bigcup_n V_n) = \sum_n \lambda(V_n) = \sum_n \lambda(V) \leq \lambda([-1, 2]) = 3$

La serie $\sum_n \lambda(V)$ può essere:

- 0 se $\lambda(V) = 0 \Rightarrow 1 \leq 0$ (contraddizione)
- $+\infty$ se $\lambda(V) > 0 \Rightarrow +\infty \leq 3$ (contraddizione)

Quindi V non può essere misurabile. ■

Conseguenza filosofica: La teoria della misura richiede l'assioma della scelta (per costruire V), ma l'assioma della scelta implica l'esistenza di insiemi non misurabili. Questo è inevitabile (risultati di Solovay, 1970).

FUNZIONI MISURABILI

4.1 Motivazione: Quali Funzioni Possiamo Integrare?

Non tutte le funzioni sono integrabili secondo Lebesgue. Il concetto chiave che separa le funzioni integrabili da quelle che non lo sono è la **misurabilità**.

Idea intuitiva: Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile se le sue "controimmagini" di insiemi "semplici" (Boreliani) sono misurabili.

4.2 Definizione di Funzione Misurabile

Definizione 4.1: Siano (X, F) e (Y, G) spazi misurabili. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è misurabile (o F - G misurabile) se:

$$\forall B \in G: f^{-1}(B) \in F$$

Caso standard: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile se $f^{-1}(B) \in F$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposizione 4.1 (Criterio pratico): Una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è misurabile se e solo se:

$$\forall a \in \mathbb{R}: \{x : f(x) > a\} \in F$$

Dimostrazione:

($\Leftarrow$) Supponiamo $\{x : f(x) > a\} \in F$ per ogni a . La famiglia: $\mathcal{A} = \{\{x : f(x) > a\} : a \in \mathbb{R}\}$

genera $B(\mathbb{R})$ (ogni intervallo $(a, b) = \{y : y > a\} \cap \{y : y \leq b\}^c$ può essere espresso in termini di questi insiemi).

Per ogni $B \in B(\mathbb{R})$, B può essere costruito da A tramite operazioni numerabili di unione, intersezione, complemento. Poiché F è σ -algebra e contiene le controimmagini degli elementi di A , contiene $f^{-1}(B)$.

($\Rightarrow$) Banale: se f è misurabile e $(a, +\infty) \in B(\mathbb{R})$, allora $f^{-1}((a, +\infty)) = \{x : f(x) > a\} \in F$. ■

Corollario: Sono equivalenti:

1. $\{x : f(x) > a\} \in F$ per ogni a
2. $\{x : f(x) \geq a\} \in F$ per ogni a
3. $\{x : f(x) < a\} \in F$ per ogni a
4. $\{x : f(x) \leq a\} \in F$ per ogni a

4.3 Operazioni con Funzioni Misurabili

Teorema 4.1 (Stabilità algebrica): Se $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili e $c \in \mathbb{R}$:

1. $f + g$ è misurabile
2. fg è misurabile
3. cf è misurabile
4. $|f|$ è misurabile
5. $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$ sono misurabili

Dimostrazione di (1):

$$\{x : (f+g)(x) > a\} = \{x : f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) > r\} \cap \{x : g(x) > a - r\}$$

(unione su razionali perché $f(x) + g(x) > a \Leftrightarrow$ esiste $r \in \mathbb{Q}$ con $f(x) > r$ e $g(x) > a - r$)

Ogni insieme $\{x : f(x) > r\} \cap \{x : g(x) > a - r\}$ è in F (intersezione di misurabili). L'unione numerabile ($\mathbb{Q}$ è numerabile) è in F . ■

Teorema 4.2 (Limiti di funzioni misurabili): Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni misurabili, allora:

1. $\sup f_n$ è misurabile
2. $\inf f_n$ è misurabile
3. $\limsup f_n$ è misurabile
4. $\liminf f_n$ è misurabile
5. Se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni x , allora f è misurabile

Dimostrazione:

$$\{x : \sup f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) > a\} \in F$$

$$\{x : \inf f_n(x) < a\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) < a\} \in F$$

$\limsup f_n = \inf_{\{n\}} \sup_{\{k \geq n\}} f_k$ (misurabile per (1) e (2))

Se $f_n \rightarrow f$ puntualmente, $f = \limsup f_n = \liminf f_n$. ■

4.4 Funzioni Semplici e Approssimazione

(Questa sezione è già presente nel documento originale, ma aggiungiamo dettagli tecnici)

Teorema 4.3 (Approssimazione di funzioni misurabili generali): Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile. Allora:

1. Esistono funzioni semplici s_n con $s_n \rightarrow f$ puntualmente
2. Se $f \geq 0$, possiamo scegliere s_n crescente con $0 \leq s_n \uparrow f$
3. Se f è limitata, la convergenza può essere resa uniforme

Costruzione canonica per $f \geq 0$:

$$s_n(x) = \begin{cases} k/2^n & \text{se } k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n, \quad k = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ n & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

$$\text{Più formalmente: } s_n = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} (k/2^n) \chi_{A_k} + n \chi_{B_n}$$

$$\text{dove: } A_k = \{x : k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n\} \quad B_n = \{x : f(x) \geq n\}$$

Questi insiemi sono misurabili perché: $A_k = \{x : f(x) \geq k/2^n\} \cap \{x : f(x) < (k+1)/2^n\}$

Per f generale: Decomponendo $f = f^+ - f^-$ e applicando la costruzione a f^+ e f^- .

4.5 Quasi Ovunque (q.o.)

Definizione 4.2: Una proprietà $P(x)$ vale μ -quasi ovunque (μ -q.o.) se:

$$\mu(\{x : P(x) \text{ è falsa}\}) = 0$$

Esempi:

- " $f = g$ μ -q.o." significa $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$
- " $f_n \rightarrow f$ μ -q.o." significa che l'insieme di punti dove NON c'è convergenza ha misura zero

Teorema 4.4: Se $f = g$ μ -q.o. e g è misurabile, allora f è misurabile.

Dimostrazione: Sia $N = \{x : f(x) \neq g(x)\}$. Allora $\mu(N) = 0$, quindi $N \in \mathcal{F}$ (per completezza di μ). Per ogni a :

$$\{x : f(x) > a\} = (\{x : g(x) > a\} \cap N^c) \cup (\{x : f(x) > a\} \cap N)$$

Il primo insieme è in $\mathcal{F}$ (intersezione di misurabili). Il secondo è sottoinsieme di N che ha misura zero, quindi è in $\mathcal{F}$ (per completezza). ■

L'INTEGRALE DI LEBESGUE

5.1 La Filosofia dell'Integrazione secondo Lebesgue

Prima di entrare nei dettagli tecnici, è illuminante confrontare le filosofie dell'integrazione di Riemann e Lebesgue.

Integrale di Riemann: Partizioniamo il dominio $[a,b]$ in intervalli $[x_{i-1}, x_i]$, approssimiamo f su ciascun intervallo con un valore costante (ad esempio $\inf$ o $\sup$), e sommiamo:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

dove $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Questa è una somma pesata dove i "pesi" sono le lunghezze degli intervalli.

Integrale di Lebesgue: Partizioniamo il codominio $[\inf f, \sup f]$ in intervalli $[y_{i-1}, y_i]$, consideriamo gli insiemi $E_i = \{x : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$, e formiamo:

$$\sum_{i=1}^n y_i \mu(E_i)$$

Lebesgue disse: "Uno scommettitore che ha puntato su infiniti cavalli calcola le sue vincite totali contando le banconote che ha in tasca (partizionando per valore delle banconote), non ripercorrendo l'ordine in cui ha ricevuto ciascuna banconota."

Questa inversione di prospettiva ha conseguenze profonde:

1. Funzioni con discontinuità su insiemi grandi (ma di misura zero) diventano integrabili
2. I teoremi di passaggio al limite diventano molto più potenti
3. Lo spazio delle funzioni integrabili è completo

5.2 Funzioni Semplici

Le funzioni semplici sono i mattoni fondamentali dell'integrazione secondo Lebesgue.

Definizione 5.1 (Funzione Semplice): Una funzione $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ è detta **semplice** se assume un numero finito di valori. Equivalentemente, s è semplice se esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ distinti e $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ disgiunti tali che:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

dove χ_{A_i} è la funzione caratteristica (o indicatrice) di A_i :

$$\chi_{A_i}(x) = 1 \text{ se } x \in A_i, \chi_{A_i}(x) = 0 \text{ se } x \notin A_i$$

Una funzione semplice s è detta **misurabile** se ciascun A_i è misurabile ($A_i \in \mathcal{F}$).

Esempio 5.1: La funzione caratteristica $\chi_{[0,1]}$ di $[0,1]$ su $\mathbb{R}$ è una funzione semplice misurabile (assume valori 0 e 1).

Esempio 5.2: La funzione "floor" ristretta a $[0, n)$:

$s(x) = \lfloor x \rfloor = k$ se $k \leq x < k+1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

è una funzione semplice misurabile che assume valori $0, 1, \dots, n-1$.

Proposizione 5.1: Se s e t sono funzioni semplici misurabili e $c \in \mathbb{R}$, allora:

- $s + t$ è semplice misurabile
- cs è semplice misurabile
- st è semplice misurabile
- $\max\{s, t\}$ e $\min\{s, t\}$ sono semplici misurabili

Dimostrazione: Siano $s = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}$ e $t = \sum_j \beta_j \chi_{B_j}$ con A_i, B_j misurabili disgiunti. Allora:

$$s + t = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$$

Gli insiemi $A_i \cap B_j$ sono misurabili e disgiunti, quindi $s + t$ è semplice misurabile. Gli altri casi si dimostrano analogamente. ■

5.3 Integrale per Funzioni Semplici Non Negative

Definizione 5.2 (Integrale di Funzione Semplice): Sia $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ una funzione semplice misurabile non negativa ($\alpha_i \geq 0$) su uno spazio di misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Definiamo l'integrale di s rispetto a μ come:

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

con la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Osservazioni:

1. La definizione è indipendente dalla rappresentazione di s . Se $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}$, allora $\sum_i \alpha_i \mu(A_i) = \sum_j \beta_j \mu(B_j)$.
2. La convenzione $0 \cdot \infty = 0$ è essenziale: se A ha misura infinita ma s vale 0 su A , vogliamo che il contributo di A all'integrale sia zero.

Esempio 5.3: Su $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$, consideriamo $s = 3\chi_{[0,1]} + 5\chi_{[2,4]}$. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}} s \, d\lambda = 3 \cdot \lambda([0,1]) + 5 \cdot \lambda([2,4]) = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13$$

Proposizione 5.2 (Proprietà dell'integrale per funzioni semplici): Se s, t sono funzioni semplici non negative misurabili e $a, b \geq 0$:

- (i) $\int_X (as + bt) \, d\mu = a \int_X s \, d\mu + b \int_X t \, d\mu$ (linearità)
- (ii) Se $s \leq t$ μ -q.o., allora $\int_X s \, d\mu \leq \int_X t \, d\mu$ (monotonia)
- (iii) Se $A \in \mathcal{F}$, $\int_A s \, d\mu = \int_X s \chi_A \, d\mu$

Dimostrazione di (i): Siano $s = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i}$ e $t = \sum_j \beta_j \chi_{B_j}$. Allora:

$$\begin{aligned} as + bt &= \sum_i a \alpha_i \chi_{A_i} + \sum_j b \beta_j \chi_{B_j} = \sum_{\{i,j\}} (a \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j} + b \beta_j \chi_{A_i \cap B_j}) \\ &= \sum_{\{i,j\}} (a \alpha_i + b \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j} \text{ (negli insiemi } A_i \cap B_j, s \text{ vale } \alpha_i \text{ e } t \text{ vale } \beta_j) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_X (as + bt) d\mu &= \sum_{\{i,j\}} (a \alpha_i + b \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= a \sum_{\{i,j\}} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + b \sum_{\{i,j\}} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= a \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + b \sum_j \beta_j \mu(B_j) = a \int_X s d\mu + b \int_X t d\mu \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.4 Approssimazione con Funzioni Semplici

Il passo cruciale è mostrare che ogni funzione misurabile non negativa può essere approssimata "dal basso" con funzioni semplici.

Teorema 5.1 (Approssimazione Crescente): Sia $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Allora esiste una successione $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni semplici misurabili non negative tale che:

- (i) $s_n \leq s_{n+1}$ per ogni n (successione crescente)
- (ii) $s_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$ (convergenza puntuale)
- (iii) Se f è limitata, la convergenza è uniforme

Dimostrazione (costruttiva): Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$s_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k/2^n & \text{se } k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n, \quad k = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ n & \text{se } f(x) \geq n \end{array} \right.$$

Più esplicitamente:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} (k/2^n) \chi_{A_{n,k}}(x) + n \chi_{B_n}(x)$$

dove $A_{n,k} = \{x : k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n\}$ e $B_n = \{x : f(x) \geq n\}$.

Verifichiamo le proprietà:

(i) **Monotonia:** Per ogni x , se $f(x) < n$, allora $s_n(x)$ approssima $f(x)$ con precisione $1/2^n$. Quando passiamo a s_{n+1} , la precisione raddoppia ($1/2^{n+1}$), quindi l'approssimazione può solo migliorare (aumentare). Se $f(x) \geq n$, allora $s_n(x) = n \leq n+1 \leq s_{n+1}(x)$.

(ii) **Convergenza puntuale:** Fissiamo $x \in X$.

- Se $f(x) < +\infty$: Per n abbastanza grande, $f(x) < n$, quindi $s_n(x)$ è la maggiore multipla di $1/2^n$ minore di $f(x)$. Quindi $0 \leq f(x) - s_n(x) < 1/2^n \rightarrow 0$.
- Se $f(x) = +\infty$: Allora $s_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$.

(iii) **Uniformità per f limitata:** Se $f \leq M$, allora per $n > M$, $s_n(x)$ non vale mai n , e la differenza $f(x) - s_n(x) < 1/2^n$ per ogni x , quindi $\|f - s_n\|_\infty < 1/2^n \rightarrow 0$. ■

Esempio 5.4: Consideriamo $f(x) = x$ su $[0, 2]$. Allora:

$$s_1(x) = \{0 \text{ se } 0 \leq x < 1/2, 1/2 \text{ se } 1/2 \leq x < 1, 1 \text{ se } 1 \leq x < 3/2, 3/2 \text{ se } 3/2 \leq x < 2, 1 \text{ se } x \geq 2\}$$

Ma poiché $f(x) < 1$ su $[0, 1)$, abbiamo effettivamente $s_1(x) = 0$ su $[0, 1/2)$, $s_1(x) = 1/2$ su $[1/2, 1)$, ecc.

Questo teorema è fondamentale perché permette di definire l'integrale per funzioni generali a partire dall'integrale per funzioni semplici.

5.5 Integrale per Funzioni Non Negative

Definizione 5.3 (Integrale di Lebesgue per $f \geq 0$): Sia $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione misurabile su $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Definiamo l'integrale di Lebesgue di f come:

$$\int_X f \, d\mu = \sup\{\int_X s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ semplice misurabile}\}$$

Interpretazione: Prendiamo tutte le funzioni semplici che "stanno sotto" f , calcoliamo i loro integrali, e prendiamo il supremo. Per il Teorema 5.1, sappiamo che questo supremo è effettivamente raggiunto come limite di una successione crescente.

Proposizione 5.3: Se f è semplice, questa definizione coincide con la Definizione 5.2.

Dimostrazione: Se f è semplice, l'insieme $\{s : 0 \leq s \leq f, s \text{ semplice}\}$ ha f come elemento massimale, quindi $\sup\{\int s \, d\mu\} = \int f \, d\mu$. ■

Proposizione 5.4: Se $f = 0$ μ -q.o. (cioè $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$), allora $\int f \, d\mu = 0$.

Dimostrazione: Ogni funzione semplice s con $0 \leq s \leq f$ vale 0 μ -q.o., quindi $\int s \, d\mu = 0$. Pertanto $\sup\{\int s \, d\mu\} = 0$. ■

5.6 Proprietà Fondamentali dell'Integrale

Teorema 5.2 (Linearità): Se $f, g: X \rightarrow [0, +\infty]$ sono misurabili e $a, b \geq 0$:

$$\int_X (af + bg) \, d\mu = a \int_X f \, d\mu + b \int_X g \, d\mu$$

Dimostrazione (schema): Per il Teorema 5.1, esistono successioni crescenti $\{s_n\}, \{t_n\}$ di funzioni semplici con $s_n \uparrow f$ e $t_n \uparrow g$. Allora $as_n + bt_n$ è semplice e $as_n + bt_n \uparrow af + bg$. Per linearità dell'integrale per funzioni semplici:

$$\int (as_n + bt_n) \, d\mu = a \int s_n \, d\mu + b \int t_n \, d\mu$$

Prendendo il limite (giustificato dal Teorema della Convergenza Monotona che dimostreremo a breve), otteniamo il risultato. ■

Teorema 5.3 (Monotonia): Se $0 \leq f \leq g$ μ -q.o., allora:

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

Dimostrazione: Ogni funzione semplice s con $0 \leq s \leq f$ soddisfa anche $0 \leq s \leq g$ μ -q.o. Quindi:

$$\left\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f, s \text{ semplice} \right\} \subseteq \left\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq g, s \text{ semplice} \right\}$$

e pertanto $\sup$ del primo insieme $\leq \sup$ del secondo. ■

5.7 Il Teorema della Convergenza Monotona (Beppo Levi)

Questo è uno dei risultati più potenti e caratteristici dell'integrazione secondo Lebesgue.

Teorema 5.4 (Teorema della Convergenza Monotona, MCT): Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni misurabili $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$ tale che:

(i) $f_n \leq f_{n+1}$ per ogni n (successione crescente)

(ii) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in X$

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

dove $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n} f_n(x)$.

Dimostrazione:

Passo 1: f è misurabile. Infatti, $f = \sup_n f_n$, e il supremo di funzioni misurabili è misurabile (esercizio: mostrare che $\{x : f(x) > a\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) > a\} \in \mathcal{F}$).

Passo 2: Per monotonia dell'integrale (Teorema 5.3), $\{\int f_n \, d\mu\}$ è una successione crescente, quindi esiste (possibilmente $= +\infty$):

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \sup_n \int f_n \, d\mu$$

Passo 3: Mostriamo $L \leq \int f \, d\mu$. Poiché $f_n \leq f$, per monotonia $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ per ogni n . Prendendo il limite:

$$L = \lim_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

Passo 4: Mostriamo $\int f \, d\mu \leq L$. Sia s una funzione semplice con $0 \leq s \leq f$. Fissiamo $c \in (0, 1)$ e definiamo:

$$E_n = \{x : f_n(x) \geq cs(x)\}$$

Poiché $f_n \uparrow f$ e $s \leq f$, per ogni x eventualmente $f_n(x) \geq cs(x)$, quindi $E_n \uparrow X$. Abbiamo:

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} cs \, d\mu = c \int_{E_n} s \, d\mu$$

Per continuità dal basso (Teorema 2.3):

$$\lim_n \int \{E_n\} s \, d\mu = \int X s \, d\mu$$

Quindi:

$$L = \lim_n \int f_n \, d\mu \geq c \lim_n \int \{E_n\} s \, d\mu = c \int X s \, d\mu$$

Poiché questo vale per ogni $c < 1$ e ogni s semplice con $0 \leq s \leq f$, facendo $c \rightarrow 1$:

$$L \geq \int X s \, d\mu \text{ per ogni } s \text{ semplice con } 0 \leq s \leq f$$

Prendendo il supremo su tutte le s :

$$L \geq \sup_{\{s\}} \int X s \, d\mu = \int X f \, d\mu \quad \blacksquare$$

Osservazione cruciale: Questo teorema NON vale per l'integrale di Riemann! Consideriamo su $[0,1]$:

$$f_n(x) = n \chi_{[0, 1/n]}(x)$$

Allora f_n è Riemann-integrabile con $\int_0^1 f_n \, dx = n \cdot (1/n) = 1$. Ma $f_n \rightarrow 0$ puntualmente (per ogni $x > 0$ fissato, $f_n(x) = 0$ per $n > 1/x$). Quindi il limite puntuale $f = 0$ (eccetto in $x=0$) ha integrale 0, non 1.

Per Lebesgue invece, $\lambda(\{0\}) = 0$, quindi $f = 0$ λ -q.o., e $\int f \, d\lambda = 0$. Ma anche $\lim \int f_n \, d\lambda = 0$, perché $f_n \rightarrow 0$ λ -q.o. (differiscono solo su $\{0\}$ che ha misura zero). Il teorema è coerente, ma mostra che l'integrale di Riemann fallisce.

5.8 Il Lemma di Fatou

Un altro risultato fondamentale sui limiti.

Teorema 5.5 (Lemma di Fatou): Sia $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una successione di funzioni misurabili $f_n: X \rightarrow [0, +\infty]$. Allora:

$$\int X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int X f_n \, d\mu$$

$$\text{dove } \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_n \inf_{\{k \geq n\}} f_k(x).$$

Dimostrazione: Definiamo $g_n(x) = \inf_{\{k \geq n\}} f_k(x)$. Allora:

- g_n è misurabile (inf numerabile di funzioni misurabili)
- $g_n \leq g_{n+1}$ (successione crescente)
- $g_n \uparrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$

Inoltre, $g_n \leq f_n$ per ogni n , quindi $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$. Prendendo l'inf su $k \geq n$:

$$\int g_n \, d\mu \leq \inf_{\{k \geq n\}} \int f_k \, d\mu$$

Per il Teorema della Convergenza Monotona applicato a $g_n \uparrow \liminf f_n$:

$$\int (\liminf f_n) \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu \leq \lim_n \inf_{\{k \geq n\}} \int f_k \, d\mu = \liminf_n \int f_n \, d\mu \quad \blacksquare$$

Il Lemma di Fatou è notevolmente generale: non richiede monotonia o convergenza puntuale, solo che le funzioni siano non negative.

5.9 Il Teorema della Convergenza Dominata (Lebesgue)

Il più potente e usato teorema sui limiti nell'integrazione di Lebesgue.

Teorema 5.6 (Convergenza Dominata, DCT): Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su (X, F, μ) tale che:

1. $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per μ -q.o. x
2. Esiste g integrabile ($\int g \, d\mu < +\infty$) con $|f_n(x)| \leq g(x)$ per μ -q.o. x e ogni n

Allora:

- f è integrabile
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ (convergenza in L^1)

Dimostrazione:

Passo 1: f è misurabile (Teorema 4.2) e $|f| \leq g$ q.o., quindi f è integrabile.

Passo 2: Applichiamo il Lemma di Fatou alle successioni:

- $\{g + f_n\}$ (tutte ≥ 0)
- $\{g - f_n\}$ (tutte ≥ 0)

Per $\{g + f_n\}$: $\int (g + f) \, d\mu = \int \liminf (g + f_n) \, d\mu \leq \liminf \int (g + f_n) \, d\mu = \int g \, d\mu + \liminf \int f_n \, d\mu$

Quindi: $\int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$

Per $\{g - f_n\}$: $\int (g - f) \, d\mu \leq \liminf \int (g - f_n) \, d\mu = \int g \, d\mu - \limsup \int f_n \, d\mu$

Quindi: $-\int f \, d\mu \leq -\limsup \int f_n \, d\mu$, cioè $\limsup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$

Passo 3: Combinando: $\limsup \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu$

Poiché sempre $\limsup \geq \liminf$, abbiamo uguaglianza, quindi esiste il limite: $\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

Passo 4: Per la convergenza in L^1 , applichiamo DCT a $|f_n - f|$ (dominata da $2g$). ■

Esempi di applicazione:

Esempio 5.5: Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (n/(1+n^2x^2)) e^{-x} \, dx$

Osserviamo:

- $f_n(x) = (n/(1+n^2x^2)) e^{-x} \rightarrow 0$ puntualmente per ogni $x > 0$
- $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ per ogni x (verificare: $n/(1+n^2x^2) \leq 1$)

- $g(x) = e^{-x}$ è integrabile su $[0, \infty)$

Per DCT: $\lim \int f_n dx = \int 0 dx = 0$

Esempio 5.6 (contrasto con Riemann): $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ su $[0, 1]$

Puntualmente: $f_n(x) \rightarrow 0$ per ogni $x > 0$ Integrale di Riemann: $\int_0^1 f_n(x) dx = n - 1 + e^{-n} \rightarrow +\infty$

Il DCT NON si applica perché non esiste g integrabile con $f_n \leq g$ per ogni n !

5.10 Confronto tra i Teoremi di Convergenza

Teorema	Ipotesi	Conclusione	Applicabilità
Convergenza Monotona	$f_n \uparrow f, f_n \geq 0$	$\lim \int f_n = \int f$	Anche se $\int f = +\infty$
Fatou	$f_n \geq 0$	$\int(\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n$	Disuguaglianza, molto generale
Convergenza Dominata	$ f_n \leq g$ integrabile	$\lim \int f_n = \int(\lim f_n)$	Richiede dominanza, dà convergenza forte

Gerarchia:

- MCT è caso speciale di DCT (con $g = \lim f_n$)
- Fatou è più debole di DCT (solo disuguaglianza)
- DCT è il più versatile per applicazioni pratiche

MISURE SU VARIETÀ E GEOMETRIA RIEMANNIANA

6.1 Dalla Teoria Astratta alla Geometria

Nei volumi precedenti abbiamo costruito la teoria astratta della misura, partendo dagli assiomi fino all'integrazione secondo Lebesgue. Ora affrontiamo il problema inverso: come applicare questa teoria a oggetti geometrici concreti come superfici, curve, e in particolare la superficie terrestre?

Il collegamento fondamentale è fornito dalla geometria differenziale. Una superficie nello spazio tridimensionale (o più generalmente una varietà) porta naturalmente con sé una nozione di "area" o "volume", che può essere formalizzata attraverso la teoria della misura. Questa misura non è arbitraria, ma è determinata dalla geometria intrinseca della superficie, codificata nel suo tensore metrico.

6.2 Varietà Differenziabili: Intuizione Geometrica

Prima di entrare nelle definizioni formali, sviluppiamo l'intuizione geometrica.

Immaginate di vivere su una superficie bidimensionale, come un abitante di un mondo piatto che non può percepire la terza dimensione. Localmente, intorno a ogni punto, il vostro mondo sembra $\mathbb{R}^2$: potete usare coordinate (x, y) per descrivere posizioni vicine. Ma globalmente, la superficie potrebbe essere curva: potrebbe essere una sfera, un toro, o una forma più complessa.

Una **varietà differenziabile** M di dimensione n è precisamente questo: uno spazio che localmente "assomiglia" a $\mathbb{R}^n$, ma che globalmente può avere una struttura complicata. La "somiglianza locale" è resa precisa attraverso le **carte locali**: mappe $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ che assegnano coordinate ai punti di un aperto $U \subseteq M$.

Esempio 6.1 (La Sfera S^2): La sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Non è globalmente omeomorfa a $\mathbb{R}^2$ (è compatta, mentre $\mathbb{R}^2$ no), ma ogni punto ha un intorno che può essere parametrizzato da $\mathbb{R}^2$. Ad esempio, l'emisfero nord:

$$U_N = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$$

può essere parametrizzato da:

$$\varphi_N: D \rightarrow U_N, \varphi_N(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

dove $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ è il disco unitario aperto in $\mathbb{R}^2$.

Esempio 6.2 (La Terra come Ellissoide): La superficie terrestre è approssimata da un ellissoide di rivoluzione:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$$

dove $a \approx 6378$ km (raggio equatoriale) e $b \approx 6357$ km (raggio polare). Questa è una varietà bidimensionale immersa in $\mathbb{R}^3$.

6.3 Il Tensore Metrico: Misurare Distanze e Angoli

Su una varietà astratta M non abbiamo a priori una nozione di "distanza" o "angolo". Questi concetti richiedono una struttura addizionale: una **metrica Riemanniana**.

Definizione 6.1 (Metrica Riemanniana, intuitiva): Una metrica Riemanniana su una varietà M è, per ogni punto $p \in M$, un prodotto scalare g_p sullo spazio tangente $T_p M$ che varia in modo liscio con p .

In coordinate locali $(x^1, \dots, x^n)$, lo spazio tangente è generato dai vettori $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$. Il prodotto scalare è determinato dai valori:

$$g_{\{ij\}}(p) = g_p(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$$

La matrice $G(p) = [g_{ij}(p)]$ è detta **matrice metrica** o **prima forma fondamentale**.

Proprietà essenziali:

1. Simmetria: $g_{ij} = g_{ji}$
2. Definitezza positiva: G è una matrice definita positiva

Esempio 6.3 (Metrica Euclidea su $\mathbb{R}^n$): In coordinate cartesiane standard:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \text{ (delta di Kronecker)}$$

cioè $G = I$ (matrice identità). Il prodotto scalare è il prodotto scalare standard.

Esempio 6.4 (Coordinate Polari su $\mathbb{R}^2$): In coordinate polari (r, θ) :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

Il tensore metrico diventa:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Questo riflette il fatto che un piccolo passo $\Delta\theta$ in direzione angolare corrisponde a uno spostamento fisico $r \Delta\theta$ (crescente con r).

6.4 Lunghezza di Curve e Distanza Geodetica

Data una metrica Riemanniana, possiamo definire la lunghezza di curve.

Definizione 6.2 (Lunghezza di Curva): Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una curva liscia su (M, g) . La lunghezza di γ è:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_g dt = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

In coordinate locali, se $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(\gamma(t)) (dx^i/dt)(dx^j/dt)} dt$$

Interpretazione: L'elemento infinitesimo di lunghezza è:

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}$$

Questa quantità è invariante per riparametrizzazioni della curva (se parametrizziamo con velocità diversa, l'integrale resta lo stesso).

Esempio 6.5 (Lunghezza su $\mathbb{R}^2$ con metrica Euclidea):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Per la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

Questo è l'integrale standard della lunghezza d'arco dal calcolo multivariabile.

Definizione 6.3 (Distanza Geodetica): La distanza tra due punti $p, q \in M$ è:

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ curva da } p \text{ a } q\}$$

Una curva γ che realizza questo infimo (se esiste) è detta **geodetica**.

6.5 Geodetiche: Le "Linee Rette" su Varietà Curve

Le geodetiche sono le curve di lunghezza minima tra due punti. Su R^n con metrica euclidea, sono le linee rette. Su una sfera, sono gli archi di cerchio massimo. Sulla superficie terrestre, sono le rotte più brevi per viaggi aerei o marittimi.

Equazione delle Geodetiche: Una curva $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ è una geodetica se e solo se soddisfa il sistema di equazioni differenziali:

$$d^2x^k/dt^2 + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} (dx^i/dt)(dx^j/dt) = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

dove Γ^k_{ij} sono i **simboli di Christoffel** (o coefficienti di connessione):

$$\Gamma^k_{ij} = (1/2) \sum_l g^{kl} (\partial g_{il} / \partial x^j + \partial g_{jl} / \partial x^i - \partial g_{ij} / \partial x^l)$$

e $[g^{ij}] = G^{-1}$ è l'inversa della matrice metrica.

Derivazione euristica: Una geodetica è una curva con "accelerazione" nulla rispetto alla connessione di Levi-Civita. L'equazione codifica che γ è autoparallela: il suo vettore tangente rimane parallelo a se stesso lungo la curva.

Esempio 6.6 (Geodetiche sulla Sfera): Sulla sfera S^2 con la metrica indotta da R^3 , le geodetiche sono gli archi di cerchi massimi. Ad esempio, il cerchio equatoriale e i meridiani sono geodetiche. Una traiettoria che va dal polo nord a quello sud lungo un meridiano è la rotta più breve.

Esempio 6.7 (Geodetiche sull'Ellissoide Terrestre): Sull'ellissoide che approssima la Terra, le geodetiche non hanno espressione in forma chiusa. Il calcolo numerico di geodetiche sull'ellissoide è un problema classico della geodesia, risolto con algoritmi iterativi (come le formule di Vincenty che vedremo).

6.6 L'Elemento di Volume Riemanniano

Ora arriviamo al cuore del collegamento con la teoria della misura: come definire una misura naturale su una varietà Riemanniana?

Costruzione Intuitiva: Su R^n , il volume di un parallelepipedo generato da vettori $v_1, \dots, v_n$ è $|\det[v_1 \dots v_n]|$. Su una varietà con coordinate locali, un "parallelepipedo infinitesimo" è generato da $dx^1 \partial/\partial x^1, \dots, dx^n \partial/\partial x^n$. Il suo volume deve tenere conto della metrica.

Definizione 6.4 (Elemento di Volume Riemanniano): Su una varietà Riemanniana (M, g) di dimensione n con coordinate locali $(x^1, \dots, x^n)$, l'elemento di volume è:

$$dV_g = \sqrt{(\det G)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{(\det[g_{ij}])} dx^1 \dots dx^n$$

dove $\wedge$ denota il prodotto esterno (wedge product) delle forme differenziali.

Notazione compatta: Denotando $|g| = \det G$:

$$dV_g = \sqrt{|g|} dx^1 \dots dx^n$$

Teorema 6.1 (Invarianza dell'Elemento di Volume): L'elemento dV_g è indipendente dalla scelta di coordinate locali. Se $(y^1, \dots, y^n)$ sono altre coordinate con Jacobiano $J = \partial(y^1, \dots, y^n)/\partial(x^1, \dots, x^n)$:

$$\sqrt{|g|_y} dy^1 \dots dy^n = \sqrt{|g|_x} dx^1 \dots dx^n$$

dove $|g|_x, |g|_y$ sono i determinanti nelle rispettive coordinate.

Dimostrazione (schema): Il tensore metrico si trasforma come $g'_{kl} = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^l} \right) g_{ij}$. In forma matriciale, $G' = J^T G J$. Quindi:

$$\det G' = (\det J)^2 \det G$$

$$\sqrt{(\det G')} = |\det J| \sqrt{(\det G)}$$

Per il teorema del cambiamento di variabili nell'integrazione multipla:

$$dy^1 \dots dy^n = |\det J| dx^1 \dots dx^n$$

Quindi:

$$\sqrt{(\det G')} dy^1 \dots dy^n = |\det J| \sqrt{(\det G)} |\det J| dx^1 \dots dx^n = \sqrt{(\det G)} dx^1 \dots dx^n \quad \blacksquare$$

Questa invarianza è cruciale: garantisce che il "volume" di una regione sulla varietà è ben definito, indipendentemente da come scegliamo di parametrizzarla.

6.7 Calcolo Pratico: Coordinate Sferiche

Esempio 6.8: Su R^3 , consideriamo coordinate sferiche (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi & y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

dove $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ (colatitudine), $0 \leq \varphi < 2\pi$ (longitudine).

Calcoliamo il tensore metrico. I vettori tangenti sono:

$$\frac{\partial r}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \quad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

Il tensore metrico è:

$$g_{\{rr\}} = \langle \frac{\partial r}{\partial r}, \frac{\partial r}{\partial r} \rangle = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1$$

$$g_{\{\theta\theta\}} = \langle \partial r / \partial \theta, \partial r / \partial \theta \rangle = r^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta) = r^2$$

$$g_{\{\varphi\varphi\}} = \langle \partial r / \partial \varphi, \partial r / \partial \varphi \rangle = r^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{\{r\theta\}} = g_{\{r\varphi\}} = g_{\{\theta\varphi\}} = 0 \text{ (ortogonalità)}$$

Quindi:

$$G = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$$

$$\det G = r^4 \sin^2 \theta$$

L'elemento di volume è:

$$dV = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Questo è il ben noto elemento di volume in coordinate sferiche! Riconosciamo:

- Il fattore r^2 riflette che a distanza r dal centro, l'area della superficie sferica cresce come r^2
- Il fattore $\sin \theta$ riflette che i paralleli hanno circonferenza decrescente verso i poli

Applicazione: Volume della sfera di raggio R :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi [r^3/3]_0^R [-\cos \theta]_0^\pi = 2\pi (R^3/3) \cdot 2 = (4/3)\pi R^3 \end{aligned}$$

6.8 Superfici in $\mathbb{R}^3$ e Prima Forma Fondamentale

Per una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $r(u, v)$, il tensore metrico è detto **prima forma fondamentale** e tradizionalmente denotato:

$$E = \langle r_u, r_u \rangle, F = \langle r_u, r_v \rangle, G = \langle r_v, r_v \rangle$$

dove $r_u = \partial r / \partial u$, $r_v = \partial r / \partial v$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$.

Il tensore metrico è:

$$g = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

L'elemento d'area è:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Esempio 6.9 (Superficie di Rivoluzione): Consideriamo una superficie generata ruotando una curva $z = f(r)$ attorno all'asse z :

$$r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$$

dove $u > 0$ è il raggio, $v \in [0, 2\pi)$ l'angolo.

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, f(u)) \quad \mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + f'(u)^2 = 1 + f'(u)^2 \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = -u \cos v \sin v + u \sin v \cos v = 0 \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2$$

$$dS = \sqrt{(u^2(1 + f'(u)^2))} du dv = u \sqrt{1 + f'(u)^2} du dv$$

Per una sfera di raggio R ($f(u) = \sqrt{R^2 - u^2}$, $u \in [0, R]$):

$$f'(u) = -u/\sqrt{R^2 - u^2}$$

$$1 + f'(u)^2 = 1 + u^2/(R^2 - u^2) = R^2/(R^2 - u^2)$$

$$dS = u \cdot R/\sqrt{R^2 - u^2} du dv$$

Integrando per calcolare l'area totale:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^R (uR)/\sqrt{R^2 - u^2} du dv = 2\pi R \int_0^R u/\sqrt{R^2 - u^2} du$$

Sostituendo $w = R^2 - u^2$, $dw = -2u du$:

$$A = 2\pi R \int_{R^2}^0 (-1/(2\sqrt{w})) dw = \pi R \int_0^{R^2} w^{-1/2} dw = \pi R [2\sqrt{w}]_0^{R^2} = 4\pi R^2$$

Ritroviamo la formula dell'area della sfera!

LA GEOMETRIA DELLA TERRA: DALL'ASTRAZIONE ALLA PRATICA

7.1 Il Problema della Forma della Terra

La determinazione della forma precisa della Terra è uno dei problemi scientifici più antichi e affascinanti. Già gli antichi Greci avevano capito che la Terra è sferica (Eratostene ne misurò la circonferenza nel III secolo a.C.), ma la forma esatta è molto più complessa.

Osservazione 1: La Terra non è perfettamente sferica. La rotazione causa uno schiacciamento ai poli: il raggio equatoriale è circa 21 km maggiore del raggio polare. Questo fu previsto teoricamente da Newton e confermato da misure geodetiche nel XVIII secolo.

Osservazione 2: La distribuzione irregolare delle masse (montagne, oceani, variazioni di densità interna) causa deviazioni anche rispetto all'ellissoide. Queste anomalie sono quantificabili attraverso il **geoide**.

7.2 Il Geoide: La Vera Figura della Terra

Definizione 7.1 (Geoide): Il geoide è la superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre che meglio approssima il livello medio dei mari (in assenza di maree, correnti e venti).

Matematicamente, il geoide è definito dall'equazione:

$$W(x, y, z) = W_0$$

dove W è il potenziale gravitazionale (somma del potenziale Newtoniano e del potenziale centrifugo dovuto alla rotazione) e W_0 è una costante scelta opportunamente.

Proprietà del Geoide:

1. **Superficie di riferimento naturale per le quote:** La "quota" di un punto in senso usuale (l'altitudine misurata con un livello) è la distanza dal geoide, non dall'ellissoide.
2. **Superficie equipotenziale:** Un corpo su geoide non "scorre" in nessuna direzione (non c'è componente tangenziale della gravità).
3. **Irregolarità:** Il geoide ha ondulazioni rispetto all'ellissoide di circa ± 100 metri, con strutture correlate alla distribuzione di massa terrestre.

Esempio 7.1 (Anomalia del Geoide): Sopra una grande catena montuosa, l'eccesso di massa attrae il geoide "verso l'alto". Sopra una fossa oceanica, il deficit di massa lo attira "verso il basso". Sopra l'Himalaya, il geoide è circa 80 m più alto dell'ellissoide di riferimento.

L'IMPOSSIBILITÀ FONDAMENTALE

8.1 Il Teorema Egregium di Gauss

Prima di studiare le proiezioni cartografiche, dobbiamo comprendere un risultato matematico profondo che governa tutte le rappresentazioni della superficie terrestre su un piano: il **Theorema Egregium** di Carl Friedrich Gauss (1827).

La curvatura di una superficie è una proprietà intrinseca che può essere calcolata esclusivamente dalla prima forma fondamentale (il tensore metrico), senza riferimento allo spazio ambiente. Per una superficie in $\mathbb{R}^3$, la **curvatura Gaussiana** K in un punto p è definita come il prodotto delle curvatures principali κ_1 e κ_2 :

$$K(p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

Esempi di Curvatura:

- **Piano:** $K = 0$ (entrambe le curvatures principali sono zero)
- **Cilindro:** $K = 0$ (una curvatura principale è zero, l'altra è $1/r$)

- **Sfera di raggio R:** $K = 1/R^2$ (entrambe le curvature principali sono $1/R$)
- **Sella:** $K < 0$ (le curvature principali hanno segni opposti)

Teorema 8.1 (Theorema Egregium): La curvatura Gaussiana K è un invariante isometrico. Cioè, se $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria (una mappa che preserva le distanze), allora $K_1(p) = K_2(\varphi(p))$ per ogni p .

Conseguenza devastante per la cartografia: Poiché la sfera ha $K = 1/R^2 > 0$ ovunque, mentre il piano ha $K = 0$ ovunque, NON ESISTE un'isometria (mappa che preserva le distanze) tra una porzione di sfera e una regione piana.

In altre parole: **È IMPOSSIBILE rappresentare fedelmente la superficie sferica su un piano.**

Ogni carta geografica introduce necessariamente distorsioni. Il meglio che possiamo fare è scegliere quali proprietà preservare (angoli? aree? distanze lungo certe direzioni?) e accettare che altre saranno distorte.

8.2 Classificazione delle Distorsioni

Una proiezione cartografica è una funzione:

$$\Pi: S \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\varphi, \lambda) \mapsto (x, y)$$

dove S è la superficie terrestre (sfera o ellissoide) parametrizzata da latitudine φ e longitudine λ .

Le distorsioni introdotte da Π sono caratterizzate quantitativamente da:

8.2.1 Moduli di Deformazione Lineare

Consideriamo un segmento infinitesimo sulla superficie di lunghezza ds . La sua immagine nel piano ha lunghezza ds' . Il rapporto:

$$k = ds'/ds$$

è detto **modulo di deformazione lineare** (o fattore di scala). In generale, k dipende sia dalla posizione che dalla direzione del segmento.

Per una superficie con coordinate (φ, λ) e metrica:

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

(dove M e N sono i raggi di curvatura meridiani e paralleli), definiamo:

Modulo di deformazione lungo il meridiano:

$$m = (1/M) \sqrt{(\partial x / \partial \varphi)^2 + (\partial y / \partial \varphi)^2}$$

Modulo di deformazione lungo il parallelo:

$$n = (1/(N \cos \varphi)) \sqrt{(\partial x / \partial \lambda)^2 + (\partial y / \partial \lambda)^2}$$

Interpretazione geometrica: m misura di quanto viene "stirato" un piccolo segmento diretto verso nord; n misura lo stiramento di un segmento diretto verso est.

8.2.2 Modulo di Deformazione Areale

Consideriamo un rettangolino infinitesimo sulla superficie di area $dA = M N \cos \varphi d\varphi d\lambda$. La sua immagine nel piano ha area dA' . Il rapporto:

$$p = dA'/dA$$

è detto **modulo di deformazione areale**.

Proposizione 8.1: Se l'angolo tra le immagini di meridiano e parallelo è ω , allora:

$$p = m \cdot n \cdot \sin \omega / \sin(\pi/2) = m \cdot n \cdot \sin \omega$$

Per proiezioni che preservano gli angoli ($\omega = \pi/2$), abbiamo $p = mn$.

8.2.3 Deformazione Angolare

La variazione massima degli angoli tra due direzioni prima e dopo la proiezione è detta **deformazione angolare massima**. Per una proiezione generica, questa dipende dalle differenze tra m e n.

8.3 L'Indicatrice di Tissot

Nicolas Auguste Tissot (1881) introdusse uno strumento geometrico elegante per visualizzare le distorsioni.

Definizione 8.1 (Indicatrice di Tissot): In ogni punto P sulla superficie, consideriamo il cerchio infinitesimo di raggio ε centrato in P. La sua immagine tramite la proiezione Π è genericamente un'ellisse, detta **ellisse di Tissot** o **indicatrice di distorsione**.

I semiassi dell'ellisse sono:

$$a_T = (1/2)(m + n + \sqrt{(m - n)^2 + 4mn \sin^2 \omega'}) \quad b_T = (1/2)(m + n - \sqrt{(m - n)^2 + 4mn \sin^2 \omega'})$$

dove ω' è un termine correttivo per proiezioni non ortogonali.

Casi speciali:

1. **Proiezione conforme** (preserva angoli): L'ellisse è un cerchio, con $a_T = b_T = m = n$. Non c'è deformazione angolare, ma c'è deformazione lineare uniforme in tutte le direzioni.
2. **Proiezione equivalente** (preserva aree): L'area dell'ellisse uguaglia l'area del cerchio originale, quindi $a_T \cdot b_T = \varepsilon^2$, cioè $mn = 1$. L'ellisse può essere molto

eccentrica (forte deformazione angolare).

3. **Proiezione equidistante** (preserva distanze lungo certe direzioni): $m = 1$ o $n = 1$ (o entrambi in casi speciali). Altre distanze sono comunque distorte.

Visualizzazione: Sulle carte geografiche, si possono disegnare le ellissi di Tissot in una griglia regolare di punti. Questo fornisce un'immagine immediata di dove e come la proiezione distorce.

PROIEZIONI CONFORMI

9.1 Teoria Generale delle Proiezioni Conformi

Una proiezione è **conforme** (o isogonica) se preserva gli angoli localmente. Equivalentemente, il tensore metrico nel piano è proporzionale al tensore metrico sulla superficie.

Teorema 9.1 (Caratterizzazione delle Proiezioni Conformi): Una proiezione Π è conforme se e solo se:

$$m = n$$

cioè, il modulo di deformazione lineare è lo stesso in tutte le direzioni (ma può variare da punto a punto).

Dimostrazione (idea): La preservazione degli angoli implica che ogni figura infinitesima circolare resta circolare (si dilata uniformemente), quindi le deformazioni lungo meridiani e paralleli devono essere uguali. ■

Conseguenza fondamentale: Per una proiezione conforme:

$$p = m \cdot n = m^2$$

La deformazione areale è il quadrato della deformazione lineare. Regioni con grande deformazione lineare hanno deformazione areale ancora più drammatica.

Teorema 9.2 (Incompatibilità conforme-equivalente): Nessuna proiezione (eccetto l'identità su regioni infinitesime) può essere simultaneamente conforme ed equivalente.

Dimostrazione: Conforme richiede $m = n$. Equivalente richiede $p = mn = 1$. Quindi $m^2 = 1$, cioè $m = 1$ ovunque. Ma questo è impossibile per una proiezione non banale dalla sfera al piano (per il Theorema Eggregium). ■

Questo teorema codifica matematicamente l'impossibilità fondamentale: dobbiamo scegliere tra preservare angoli o aree, non possiamo avere entrambi.

9.2 La Proiezione di Mercatore: Derivazione Completa

La **proiezione di Mercatore** (Gerardus Mercator, 1569) è forse la più famosa e storicamente importante proiezione conforme. Fu rivoluzionaria per la navigazione perché trasforma le **lossodromie** (linee di rotta costante) in linee rette.

9.2.1 Requisiti e Costruzione

Vogliamo una proiezione cilindrica conforme. "Cilindrica" significa che i meridiani sono linee verticali parallele equispaziate:

$$x = a \lambda$$

dove a è una costante (raggio della sfera) e λ è la longitudine.

La condizione di conformità $m = n$, insieme alla struttura cilindrica, determina univocamente la coordinata $y(\varphi)$ dove φ è la latitudine.

Passo 1: Per una sfera di raggio a , i raggi di curvatura sono $M = N = a$. La metrica è:

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

Passo 2: Sulla carta, la metrica diventa:

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 d\lambda^2 + (dy/d\varphi)^2 d\varphi^2$$

Passo 3: Calcoliamo i moduli di deformazione:

$$m = (1/a)|dy/d\varphi| \quad n = (a/(a \cos \varphi))|\partial x/\partial \lambda| = 1/\cos \varphi$$

Passo 4: La condizione $m = n$ diventa:

$$(1/a)|dy/d\varphi| = 1/\cos \varphi$$

$$dy/d\varphi = a/\cos \varphi = a \sec \varphi$$

Passo 5: Integriamo:

$$y = a \int \sec \varphi d\varphi$$

Questo integrale richiede un trucco. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \int \sec \varphi d\varphi &= \int (\sec \varphi (\sec \varphi + \tan \varphi))/(\sec \varphi + \tan \varphi) d\varphi \\ &= \int (\sec^2 \varphi + \sec \varphi \tan \varphi)/(\sec \varphi + \tan \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Sostituendo $u = \sec \varphi + \tan \varphi$, $du = (\sec \varphi \tan \varphi + \sec^2 \varphi)d\varphi$:

$$\int \sec \varphi d\varphi = \int du/u = \ln|u| + C = \ln|\sec \varphi + \tan \varphi| + C$$

Scegliendo $C = 0$ e $\varphi = 0$ per $y = 0$:

$$y = a \ln |\sec \varphi + \tan \varphi| = a \ln |\tan(\pi/4 + \varphi/2)|$$

Formula finale di Mercatore:

$$x = a \lambda \quad y = a \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2))$$

Formule equivalenti:

$$y = a \operatorname{arctanh}(\sin \varphi) = (a/2) \ln((1 + \sin \varphi)/(1 - \sin \varphi))$$

9.2.2 Proprietà Geometriche

1. **Conformità:** Per costruzione, $m = n = \sec \varphi$. La deformazione cresce verso i poli: all'equatore ($\varphi = 0$) non c'è deformazione ($m = 1$); a $\varphi = 60^\circ$ abbiamo $m = 2$ (raddoppio); a $\varphi = 80^\circ$ abbiamo $m \approx 5.76$.
2. **Poli non rappresentabili:** Quando $\varphi \rightarrow \pm\pi/2$, $y \rightarrow \pm\infty$. I poli sono a distanza infinita!
3. **Deformazione areale:** $p = m^2 = \sec^2 \varphi$. L'area è moltiplicata per $\sec^2 \varphi$. Groenlandia appare enorme rispetto all'Africa, anche se è molto più piccola in realtà.
4. **Lossodromie rettilinee:** Una lossodromia è una curva che taglia tutti i meridiani con lo stesso angolo α . In coordinate (φ, λ) , una lossodromia soddisfa:

$$d\lambda/d\varphi = \tan \alpha / (a \cos \varphi)$$

Sulla carta di Mercatore, $x = a\lambda$ e y come sopra, quindi:

$$dy/dx = (dy/d\varphi)/(dx/d\lambda) \cdot (d\lambda/d\varphi) = (a \sec \varphi) \cdot (1/a) \cdot (\tan \alpha)/(\cos \varphi) = \tan \alpha$$

che è costante! La lossodromia è una retta con pendenza $\tan \alpha$.

Applicazione nautica: Un navigatore traccia una retta sulla carta di Mercatore dal punto di partenza alla destinazione. L'angolo di questa retta rispetto ai meridiani fornisce la rotta costante da mantenere. Semplice e pratico, anche se non è la rotta più breve (che sarebbe l'arco di cerchio massimo, una geodetica).

9.2.3 Mercatore sull'Ellissoide

Per l'ellissoide terrestre, la formula si complica. Con eccentricità e , la coordinata y diventa:

$$y = a \ln(\tan(\pi/4 + \varphi/2) \cdot ((1 - e \sin \varphi)/(1 + e \sin \varphi))^{e/2})$$

Questa correzione tiene conto dello schiacciamento terrestre.

9.3 La Proiezione UTM (Universal Transverse Mercator)

La proiezione UTM è uno standard mondiale per cartografia topografica a grande scala (1:10000 - 1:500000). È essenzialmente una proiezione di Mercatore trasversa con alcune modifiche.

9.3.1 Principio della Mercatore Trasversa

Invece di avvolgere un cilindro attorno all'equatore (Mercatore standard), lo avvolgiamo lungo un meridiano. Il meridiano di tangenza (detto **meridiano centrale**) e l'equatore hanno deformazione minima.

Vantaggio: Per regioni che si estendono in direzione nord-sud (come l'Italia), la Mercatore trasversa mantiene distorsioni controllate meglio della Mercatore standard.

9.3.2 Struttura del Sistema UTM

Il mondo è diviso in:

- **60 fusi di longitudine:** Ciascuno largo 6° (da -180° a $+180^\circ$). Il fuso 1 va da -180° a -174° , il fuso 2 da -174° a -168° , ecc.
- **Bande di latitudine:** Da 80°S a 84°N , divise in bande di 8° (più piccole ai poli). Le bande sono etichettate C, D, E, ..., X (omettendo I e O per evitare confusione).

Ogni zona UTM è identificata da numero di fuso e lettera di banda, ad esempio "33T" (che include Roma).

9.3.3 Parametri della Proiezione

Per ogni fuso:

- **Meridiano centrale λ_0 :** Centro del fuso, ad esempio $\lambda_0 = -177^\circ$ per fuso 1, $\lambda_0 = -171^\circ$ per fuso 2, ecc. Formula generale: $\lambda_0 = -183^\circ + 6^\circ \times n$ dove n è il numero di fuso.
- **Fattore di scala sul meridiano centrale k_0** = 0.9996: Il cilindro è "leggermente secante" invece che tangente, riducendo le distorsioni massime ai bordi del fuso.
- **Falsa origine Est (False Easting) E_0** = 500000 m: Per evitare coordinate negative, si aggiungono 500 km alla coordinata x. Il meridiano centrale ha $E = 500000$ m.
- **Falsa origine Nord (False Northing) N_0** = 0 (emisfero Nord) o 10000000 m (emisfero Sud): Nell'emisfero nord, l'equatore ha $N = 0$. Nell'emisfero sud, si aggiungono 10000 km per evitare coordinate negative.

9.3.4 Formule di Proiezione Diretta (Semplificate per la Sfera)

Le formule complete per l'ellissoide sono molto complesse. Per una sfera di raggio a :

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ (differenza dalla longitudine centrale)

$B = \cos \varphi \sin \Delta\lambda$ $x = k_0 a \operatorname{arctanh}(B)$ $y = k_0 a (\operatorname{arctan}(\tan \varphi / \cos \Delta\lambda) - \varphi_0)$

dove φ_0 è la latitudine di origine (tipicamente 0).

Aggiungendo le false origini:

$E = x + E_0 = k_0 a \operatorname{arctanh}(\cos \varphi \sin \Delta\lambda) + 500000$ $N = y + N_0$

9.3.5 Deformazione nel Sistema UTM

Sul meridiano centrale ($\Delta\lambda = 0$):

$k = k_0 = 0.9996$

Ai bordi del fuso ($\Delta\lambda = \pm 3^\circ$), la deformazione raggiunge circa:

$k \approx 1.0004$

Quindi la deformazione varia da -0.04% (al centro) a +0.04% (ai bordi). Questa variazione controllata (<0.1%) è accettabile per la maggior parte delle applicazioni topografiche.

9.3.6 Convergenza Meridiana

In UTM, il "Nord di griglia" (direzione y crescente) differisce dal "Nord geodetico" (direzione verso il polo). L'angolo γ tra i due è detto **convergenza meridiana**:

$\gamma \approx \Delta\lambda \sin \varphi_{\text{medio}}$

Per $\varphi = 45^\circ$ e $\Delta\lambda = 3^\circ$ (bordo del fuso):

$\gamma \approx 3^\circ \times \sin 45^\circ \approx 2.1^\circ$

Questo deve essere tenuto in conto quando si lavora con azimut: azimut geodetico = azimut di griglia + γ .

PROIEZIONI EQUIVALENTI

10.1 Teoria delle Proiezioni Equivalenti

Una proiezione è **equivalente** (o equiarea, o autaliaca) se preserva le aree. Matematicamente:

$p = m \cdot n = 1$

ovunque.

Teorema 10.1: Una proiezione è equivalente se e solo se il determinante dello Jacobiano della trasformazione uguaglia il fattore di scala dell'elemento d'area sulla superficie originale.

Conseguenza geometrica: Una figura di area A sulla superficie ha immagine di area esattamente A sul piano (nelle unità appropriate). Questo è fondamentale per:

- Confronti statistici (densità di popolazione, uso del suolo)
- Studi ambientali (estensione foreste, ghiacci)
- Visualizzazioni dove l'impressione visiva deve rispettare le proporzioni areali reali

Costo: Le proiezioni equivalenti introducono deformazioni angolari significative. Cerchi diventano ellissi, angoli retti diventano angoli obliqui.

10.2 La Proiezione Sinusoidale (Sanson-Flamsteed)

Una delle proiezioni equivalenti più semplici.

Costruzione:

$$x = a(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \quad y = a \varphi$$

dove a è il raggio della sfera e λ_0 il meridiano centrale.

Verifica di equivalenza:

$$\partial x / \partial \lambda = a \cos \varphi, \quad \partial x / \partial \varphi = -a(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi \quad \partial y / \partial \lambda = 0, \quad \partial y / \partial \varphi = a$$

Jacobiano:

$$|\partial(x,y)/\partial(\varphi,\lambda)| = |a \cos \varphi - a(\lambda - \lambda_0) \sin \varphi| |0 \ a| = a^2 \cos \varphi$$

Sulla sfera, l'elemento d'area è $dA = a^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda$, quindi il Jacobiano coincide con il coefficiente dell'elemento d'area. La proiezione è equivalente. ✓

Proprietà geometriche:

1. **Meridiano centrale e equatore rettilinei:** Per $\lambda = \lambda_0$, $x = 0$ (meridiano centrale è asse y). Per $\varphi = 0$, $y = 0$ (equatore è asse x).
2. **Meridiani sinusoidali:** Per φ fissato, $x = a(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi$ descrive segmenti orizzontali di lunghezza proporzionale a $\cos \varphi$ (più corti verso i poli). La forma complessiva ricorda una senoide.
3. **Distorsione crescente con $|\lambda - \lambda_0|$:** Vicino al meridiano centrale, la proiezione è buona. Lontano (grandi $|\lambda - \lambda_0|$), le distorsioni angolari diventano severe.

Uso: Mappe tematiche di Africa o Sud America (singolo continente centrato sul meridiano centrale).

10.3 La Proiezione di Mollweide

Proiezione equivalente ellittica, esteticamente gradevole per planisferi.

Equazioni:

$$x = (2\sqrt{2}/\pi) a (\lambda - \lambda_0) \cos \theta \quad y = \sqrt{2} a \sin \theta$$

dove θ è una latitudine ausiliaria determinata dall'equazione trascendente:

$$2\theta + \sin(2\theta) = \pi \sin \varphi$$

Derivazione dell'equazione ausiliaria:

Per equivalenza, vogliamo che l'area di una fascia tra latitudini φ e $\varphi + d\varphi$ sulla sfera uguagli l'area della corrispondente fascia sul piano.

Sulla sfera: $dA_{\text{sfera}} = 2\pi a^2 \cos \varphi d\varphi$ (area della fascia tra φ e $\varphi + d\varphi$)

Sul piano: La curva di bordo è un'ellisse. L'area tra θ e $\theta + d\theta$ è proporzionale a $d\theta$. Imponendo uguaglianza delle aree e integrando, si ottiene la condizione $2\theta + \sin(2\theta) = \pi \sin \varphi$.

Risoluzione numerica: L'equazione per $\theta(\varphi)$ non ha soluzione in forma chiusa. Si risolve con Newton-Raphson:

$$\theta_{\{n+1\}} = \theta_n - (2\theta_n + \sin(2\theta_n) - \pi \sin \varphi) / (2 + 2 \cos(2\theta_n))$$

partendo da $\theta_0 = \varphi$. Converge in 2-3 iterazioni.

Proprietà:

1. **Meridiano centrale ed equatore rettilinei**
2. **Forma ellittica:** Il bordo è un'ellisse con semiassi $2\sqrt{2} a$ (orizzontale) e $\sqrt{2} a$ (verticale), rapporto 2:1.
3. **Equivalenza** (per costruzione)
4. **Estetica:** Visivamente bilanciata, usata frequentemente per mappe murali del mondo

GEODESIA COMPUTAZIONALE

11.1 Il Problema Geodetico Diretto e Inverso

Nella geodesia pratica, due problemi fondamentali si presentano continuamente:

Problema Diretto: Dato un punto P_1 con coordinate (φ_1, λ_1) , un azimuth α_1 , e una distanza s , trovare le coordinate (φ_2, λ_2) del punto P_2 e l'azimut α_2 di arrivo.

Problema Inverso: Dati due punti $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ e $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$, trovare la distanza geodetica s e gli azimut α_1, α_2 .

Questi problemi sono fondamentali per:

- Navigazione (GPS, aviazione, nautica)
- Cartografia (calcolo di distanze precise)
- Geodesia satellitare
- Sistemi GIS

11.2 Formule di Vincenty

Thaddeus Vincenty (1975) sviluppò algoritmi iterativi precisi per l'ellissoide.

11.2.1 Problema Inverso (Vincenty)

Input: (φ_1, λ_1) , (φ_2, λ_2) , parametri ellissoide (a, b)

Output: s (distanza), α_1, α_2 (azimut)

Algoritmo:

1. Calcola $U_1 = \arctan((1-f) \tan \varphi_1)$, $U_2 = \arctan((1-f) \tan \varphi_2)$
dove $f = (a-b)/a$ è lo schiacciamento

2. $L = \lambda_2 - \lambda_1$
Inizializza $\lambda = L$

3. Itera fino a convergenza:

$$\sin \sigma = \sqrt{(\cos U_2 \sin \lambda)^2 + (\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda)^2}$$

$$\cos \sigma = \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \lambda$$

$$\sigma = \arctan(\sin \sigma / \cos \sigma)$$

$$\sin \alpha = (\cos U_1 \cos U_2 \sin \lambda) / \sin \sigma$$

$$\cos 2\sigma_\square = \cos \sigma - (2 \sin U_1 \sin U_2) / \cos^2 \alpha$$

$$C = (f/16) \cos^2 \alpha [4 + f(4 - 3\cos^2 \alpha)]$$

$$\lambda_{\text{nuovo}} = L + (1-C) f \sin \alpha \{ \sigma + C \sin \sigma [\cos 2\sigma_\square + C \cos \sigma (-1 + 2\cos^2 2\sigma_\square)] \}$$

Se $|\lambda_{\text{nuovo}} - \lambda| < 10^{-12}$, converge; altrimenti $\lambda \leftarrow \lambda_{\text{nuovo}}$ e ripeti

4. Calcola distanza:

$$u^2 = \cos^2 \alpha (a^2 - b^2)/b^2$$

$$A = 1 + (u^2/16384) \{ 4096 + u^2[-768 + u^2(320 - 175u^2)] \}$$

$$B = (u^2/1024) \{ 256 + u^2[-128 + u^2(74 - 47u^2)] \}$$

$$\Delta\sigma = B \sin \sigma \{ \cos 2\sigma_\square + (B/4) [\cos \sigma (-1 + 2\cos^2 2\sigma_\square) - (B/6) \cos 2\sigma_\square (-3 + 4\sin^2 \sigma) (-3 + 4\cos^2 2\sigma_\square)] \}$$

$$s = b A (\sigma - \Delta\sigma)$$

5. Calcola azimuth:

$$\alpha_1 = \arctan[(\cos U_2 \sin \lambda) / (\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda)]$$

$$\alpha_2 = \arctan[(\cos U_1 \sin \lambda) / (-\sin U_1 \cos U_2 + \cos U_1 \sin U_2 \cos \lambda)]$$

Precisione: Vincenty garantisce precisione di ~0.5 mm su distanze fino a 20000 km.

Limitazione: Fallisce per punti quasi antipodali (opposti sulla sfera).

11.2.2 Problema Diretto (Vincenty)

Input: (φ_1, λ_1) , α_1 , s

Output: (φ_2, λ_2) , α_2

Algoritmo:

$$1. U_1 = \arctan((1-f) \tan \varphi_1)$$

$$\sigma_1 = \arctan(\tan U_1 / \cos \alpha_1)$$

$$\sin \alpha = \cos U_1 \sin \alpha_1$$

$$2. u^2 = \cos^2 \alpha (a^2 - b^2)/b^2$$

A, B come nel problema inverso

$$3. \text{Inizializza } \sigma = s/(b A)$$

4. Itera:

$$2\sigma_{\square} = 2\sigma_1 + \sigma$$

$$\Delta\sigma = B \sin \sigma \{...\} \text{ [formula come sopra]}$$

$$\sigma_{\text{nuovo}} = s/(b A) + \Delta\sigma$$

Ripeti fino a $|\sigma_{\text{nuovo}} - \sigma| < 10^{-12}$

5. Calcola risultato:

$$\varphi_2 = \arctan[(\sin U_1 \cos \sigma + \cos U_1 \sin \sigma \cos \alpha_1) / ((1-f)\sqrt{(\sin^2 \alpha + (\sin U_1 \sin \sigma - \cos U_1 \cos \sigma \cos \alpha_1)^2))}]$$

$$\lambda = \arctan[(\sin \sigma \sin \alpha_1) / (\cos U_1 \cos \sigma - \sin U_1 \sin \sigma \cos \alpha_1)]$$

$$C = (f/16) \cos^2 \alpha [4 + f(4 - 3\cos^2 \alpha)]$$

$$L = \lambda - (1-C) f \sin \alpha \{\sigma + C \sin \sigma [\cos 2\sigma_{\square} + ...]\}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + L$$

$$\alpha_2 = \arctan[\sin \alpha / (-\sin U_1 \sin \sigma + \cos U_1 \cos \sigma \cos \alpha_1)]$$

11.3 Algoritmo di Karney (2013)

Charles Karney migliorò Vincenty risolvendo i casi critici.

Vantaggi:

- Funziona per punti antipodali
- Maggiore stabilità numerica
- Precisione machine-epsilon ($\sim 10^{-16}$)

Idea chiave: Usa sviluppo in serie della lunghezza geodetica invece che iterazioni sulla latitudine.

SPAZI L^p

12.1 Motivazione

Gli spazi L^p generalizzano l'idea di "funzione con integrale finito" e forniscono il framework naturale per:

- Analisi funzionale
- Teoria delle probabilità (variabili aleatorie)
- Equazioni differenziali
- Teoria del segnale (spazi di Hilbert)

12.2 Definizione degli Spazi L^p

Definizione 12.1: Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura e $p \in [1, \infty)$. Lo spazio $L^p(X, \mu)$ (o semplicemente L^p) è:

$$L^p(\mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} : \int |f|^p d\mu < \infty\}$$

con la convenzione che $f, g \in L^p$ sono **identificate** se $f = g$ μ -q.o.

Definizione 12.2 (Norma L^p): Per $f \in L^p$:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Caso speciale ($p = \infty$):

$$L^\infty(\mu) = \{f \text{ misurabile} : \text{esiste } M \text{ con } |f(x)| \leq M \text{ } \mu\text{-q.o.}\}$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \leq M \text{ } \mu\text{-q.o.}\} = \text{ess sup } |f|$$

12.3 Disuguaglianze Fondamentali

12.3.1 Disuguaglianza di Hölder

Teorema 12.1 (Hölder): Siano $p, q \in [1, \infty]$ coniugati, cioè:

$$1/p + 1/q = 1$$

Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, allora $fg \in L^1$ e:

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Dimostrazione (caso $1 < p < \infty$):

Caso speciale: Se $\|f\|_p = 0$ o $\|g\|_q = 0$, banale.

Caso generale: Normalizzando, possiamo assumere $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

Lemma (Young): Per $a, b \geq 0$: $ab \leq a^p/p + b^q/q$

(Dimostrazione: per convessità di $\log$, o calcolo diretto)

Applicando a $|f(x)|$ e $|g(x)|$:

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|^p/p + |g(x)|^q/q$$

Integrando:

$$\int |fg| \, d\mu \leq (1/p) \int |f|^p \, d\mu + (1/q) \int |g|^q \, d\mu = 1/p + 1/q = 1$$

Nel caso generale (senza normalizzazione), sostituire f con $f/\|f\|_p$. ■

Caso speciale $p = q = 2$: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\int |fg| \, d\mu \leq \left(\int |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 \, d\mu \right)^{1/2}$$

12.3.2 Disuguaglianza di Minkowski

Teorema 12.2 (Minkowski): Per $f, g \in L^p$ con $p \geq 1$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(Disuguaglianza triangolare: $\|\cdot\|_p$ è una norma)

Dimostrazione:

Per $p = 1$, segue da $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Per $p > 1$:

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

Quindi $f + g \in L^p$ se $f, g \in L^p$.

Per la disuguaglianza, scriviamo:

$$\int |f + g|^p \, d\mu = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \int |f| |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} \, d\mu$$

Applicando Hölder a ciascun termine (con esponente coniugato $q = p/(p-1)$):

$$\leq \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}$$

Notando che $(p-1)q = p$:

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q}$$

Dividendo per $\left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q}$:

$$\left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1-1/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Poiché $1 - 1/q = 1/p$:

$$\left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \blacksquare$$

12.4 Completezza degli Spazi L^p

Teorema 12.3 (Riesz-Fischer): Per ogni $p \in [1, \infty]$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ è uno spazio di Banach (spazio normato completo).

Dimostrazione (schema per $p < \infty$):

Sia $\{f_n\}$ una successione di Cauchy in L^p : per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N con:

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \text{ per } n, m > N$$

Passo 1: Costruire sottosuccessione convergente q.o.

Scelgo n_k con $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$. Definisco:

$$g_k = |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \quad G = \sum_k g_k$$

Allora:

$$\int G^p d\mu \leq \left(\sum_k \int g_k^p d\mu \right) \text{ [per Minkowski iterata]} = \sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p^p < \sum_k 2^{-kp} < \infty$$

Quindi $G \in L^p$, in particolare $G(x) < \infty$ μ -q.o.

Dove $G(x) < \infty$, la serie $\sum_k |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ converge assolutamente, quindi $f_{n_k}(x)$ converge a qualche $f(x)$.

Definiamo $f(x) = \lim f_{n_k}(x)$ dove il limite esiste, 0 altrove.

Passo 2: $f \in L^p$

Per Fatou:

$$\int |f|^p d\mu = \int \left(\liminf |f_{n_k}| \right)^p d\mu \leq \liminf \int |f_{n_k}|^p d\mu < \infty$$

Passo 3: $f_{n_k} \rightarrow f$ in L^p

Per ogni $m > N$:

$$\|f_k - f_m\|_p \leq \varepsilon \text{ per } k \text{ grande}$$

Passando al limite $k \rightarrow \infty$ e usando Fatou:

$$\int \|f - f_k\|_p^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

Quindi $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$. ■

12.5 Lo Spazio L^2 come Spazio di Hilbert

Definizione 12.3 (Prodotto scalare in L^2):

$$\langle f, g \rangle = \int fg d\mu$$

Questo è ben definito per Cauchy-Schwarz, e soddisfa:

1. $\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$
2. Linearità
3. Simmetria
4. $\langle f, f \rangle \geq 0$, con $= 0$ se e solo se $f = 0$ q.o.

Teorema 12.4: $(L^2(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è uno spazio di Hilbert (spazio con prodotto scalare completo).

Conseguenze geometriche:

- Proiezioni ortogonali
- Teorema di rappresentazione di Riesz
- Basi ortonormali (Fourier, wavelets, ecc.)

TEOREMI DI FUBINI E TONELLI

13.1 Il Problema dell'Integrazione su Prodotti

Come si calcola $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$?

Approccio intuitivo: Integrare iterativamente:

$$\iint f(x, y) dx dy = \int \left(\int f(x, y) dx \right) dy = \int \left(\int f(x, y) dy \right) dx$$

Ma quando è lecito scambiare l'ordine di integrazione? Quando l'integrale doppio uguaglia gli integrali iterati?

13.2 Misure Prodotto

Costruzione: Dati $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$, vogliamo costruire una misura $\mu \times \nu$ su $X \times Y$.

Definizione 13.1: Per un "rettangolo misurabile" $A \times B$ con $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$:

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Teorema 13.1: Esiste un'unica misura $\mu \times \nu$ su $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ che estende questa definizione.

Dimostrazione (schema):

1. Definire premisura su rettangoli
2. Estendere ad algebre finite
3. Applicare teorema di estensione di Carathéodory

13.3 Sezioni di Funzioni e Insiemi

Definizione 13.2: Per $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$:

Sezione in x : $f_x(y) = f(x, y)$ Sezione in y : $f_y(x) = f(x, y)$

Per $E \subseteq X \times Y$:

Sezione in x : $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ Sezione in y : $E_y = \{x : (x, y) \in E\}$

Lemma 13.1: Se $E \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, allora:

- $E_x \in \mathcal{G}$ per ogni $x \in X$
- $E_y \in \mathcal{F}$ per ogni $y \in Y$

Lemma 13.2: Se $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ -misurabile, allora:

- f_x è $\mathcal{G}$ -misurabile per ogni x
- f_y è $\mathcal{F}$ -misurabile per ogni y

13.4 Teorema di Tonelli

Teorema 13.2 (Tonelli): Sia $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ misurabile. Allora:

1. $x \mapsto \int f_x d\nu$ è $\mathcal{F}$ -misurabile
2. $y \mapsto \int f_y d\mu$ è $\mathcal{G}$ -misurabile
3. $\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

In breve: Per funzioni NON NEGATIVE, gli integrali iterati esistono sempre (possibilmente $= \infty$) e coincidono con l'integrale doppio.

Dimostrazione (schema):

Passo 1: Verificare per funzioni caratteristiche $\chi_{A \times B}$:

$$\iint \chi_{A \times B} = (\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \int \mu(A) \chi_B d\nu = \iint \chi_A \chi_B d\mu d\nu$$

Passo 2: Estendere a funzioni semplici per linearità.

Passo 3: Per $f \geq 0$ generale, approssimare con $s_n \uparrow f$ semplici. Applicare Convergenza Monotona agli integrali iterati:

$$\int (\int s_n) d\mu \rightarrow \int (\int f) d\mu$$

e all'integrale doppio. ■

13.5 Teorema di Fubini

Teorema 13.3 (Fubini): Sia $f \in L^1(\mu \times \nu)$. Allora:

1. $f_x \in L^1(\nu)$ per μ -q.o. x
2. $f_y \in L^1(\mu)$ per ν -q.o. y
3. $x \mapsto \int f_x d\nu$ è in $L^1(\mu)$
4. $y \mapsto \int f_y d\mu$ è in $L^1(\nu)$
5. $\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X (\int_Y f d\nu) d\mu = \int_Y (\int_X f d\mu) d\nu$

Differenza cruciale con Tonelli: Fubini richiede $f \in L^1$, ma allora f può cambiare segno.

Dimostrazione:

Applicare Tonelli a $|f|$ per ottenere integrabilità delle sezioni. Poi decomporre $f = f^+ - f^-$ e applicare Tonelli a ciascun pezzo. ■

Strategia pratica:

1. Se $f \geq 0$: usa Tonelli direttamente
2. Se f cambia segno: verifica prima $\iint |f| < \infty$, poi usa Fubini

13.6 Applicazioni Classiche

Esempio 13.1 (Convoluzione): Per $f, g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y) dy$$

Integrando:

$$\int |f * g| dx = \int \left| \int f(x-y) g(y) dy \right| dx \leq \iint |f(x-y)| |g(y)| dy dx \text{ [Fubini]} = \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)| dx \right) dy = \int |g(y)| \|f\|_1 dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Quindi $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Esempio 13.2 (Trasformata di Fourier su L^1):

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Per verificare continuità, usiamo Fubini per scambiare limite e integrale.

TEOREMA DI RADON-NIKODYM

14.1 Misure Assolutamente Continue

Definizione 14.1: Siano μ, ν misure su $(X, \mathcal{F})$. Diciamo che ν è assolutamente continua rispetto a μ ($\nu \ll \mu$) se:

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$$

Esempio 14.1: Su $\mathbb{R}$ con λ misura di Lebesgue, sia $f \in L^1(\lambda)$ non negativa. Definiamo:

$$\nu(E) = \int_E f d\lambda$$

Allora $\nu \ll \lambda$: se $\lambda(E) = 0$, allora $\int_E f d\lambda = 0$.

Domanda fondamentale: Vale il viceversa? Se $\nu \ll \mu$, esiste sempre f tale che $\nu(E) = \int_E f d\mu$?

14.2 Il Teorema di Radon-Nikodym

Teorema 14.1 (Radon-Nikodym): Siano μ, ν misure σ -finite su $(X, \mathcal{F})$ con $\nu \ll \mu$. Allora esiste una funzione misurabile $f: X \rightarrow [0, \infty)$ (unica μ -q.o.) tale che:

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \text{ per ogni } E \in \mathcal{F}$$

La funzione f è detta **derivata di Radon-Nikodym** e si denota:

$$f = d\nu/d\mu$$

Dimostrazione (caso finito, schema):

Caso speciale: μ, ν finite.

Passo 1: Consideriamo $\mu + \nu$ (misura finita). Per Riesz, $L^2(\mu+\nu)$ è Hilbert.

Passo 2: Definire funzionale lineare:

$$\Phi(g) = \int g d\nu \text{ per } g \in L^2(\mu+\nu)$$

Questo è limitato: $|\Phi(g)| \leq \|g\|_2 \sqrt{\nu(X)}$.

Passo 3: Per teorema di rappresentazione di Riesz, esiste $h \in L^2(\mu+\nu)$ con:

$$\Phi(g) = \langle g, h \rangle = \int gh d(\mu+\nu)$$

Passo 4: Manipolazioni algebriche mostrano che:

$$f = h/(1-h)$$

(dove definita) soddisfa $\nu(E) = \int_E f d\mu$. ■

14.3 Decomposizione di Lebesgue

Teorema 14.2 (Decomposizione di Lebesgue): Siano μ, ν misure σ -finite. Allora esistono uniche ν_{ac}, ν_s con:

1. $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$
2. $\nu_{ac} \ll \mu$ (parte assolutamente continua)
3. $\nu_s \perp \mu$ (parte singolare: esistono E, F disgiunti con $E \cup F = X$, $\mu(E) = 0$, $\nu_s(F) = 0$)

Applicazione: Ogni misura su $\mathbb{R}$ si decompone in:

- Parte assolutamente continua (ha densità)
- Parte singolare continua (es. Cantor)
- Parte atomica (masse puntiformi)

COORDINATE E TRASFORMAZIONI GEODETICHE

15.1 Sistemi di Coordinate Terrestri

15.1.1 Coordinate Geocentriche (XYZ)

Origine: Centro di massa terrestre

Asse Z: Verso polo nord

Asse X: Verso intersezione equatore/meridiano di Greenwich

Asse Y: Completa terna destrorsa

Vantaggi: Cartesiane, calcoli vettoriali semplici

Svantaggi: Non intuitive per navigazione

15.1.2 Coordinate Geodetiche (φ, λ, h)

φ : Latitudine geodetica (angolo tra normale all'ellissoide e piano equatoriale)

λ : Longitudine

h : Quota ellissoidica (distanza lungo la normale dall'ellissoide)

Attenzione: $\varphi \neq$ latitudine geocentrica!

15.2 Trasformazioni tra Sistemi

15.2.1 Da Geodetiche a Geocentriche

Parametri ellissoide: a (semiasse maggiore), e (eccentricità)

$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ [raggio di curvatura primo verticale]

$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$

$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$

$$Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi$$

15.2.2 Da Geocentriche a Geodetiche

Più complesso (equazioni trascendenti). Algoritmo iterativo:

1. $p = \sqrt{X^2 + Y^2}$
2. $\lambda = \text{atan2}(Y, X)$
3. Inizializza $\varphi_0 = \text{atan}(Z / (p(1 - e^2)))$
4. Itera:

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_i}$$

$$h = p / \cos \varphi_i - N$$

$$\varphi_{i+1} = \text{atan}(Z / (p(1 - e^2 N/(N + h))))$$

fino a $|\varphi_{i+1} - \varphi_i| < \text{tolleranza}$
5. Calcola h finale

15.3 Trasformazioni tra Datum

Datum diversi usano ellissoidi diversi con origini/orientamenti diversi.

15.3.1 Trasformazione a 7 Parametri (Helmert)

Da datum A a datum B:

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -R_z & R_y \\ R_z & 1 & -R_x \\ -R_y & R_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} \cdot (1 + s)$$

7 parametri:

- $\Delta = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$: traslazione
- (R_x, R_y, R_z) : rotazioni (piccole)
- s : fattore di scala

Esempio WGS84 → ETRF2000:

- $\Delta X \approx 0.05 \text{ m}$
- $\Delta Y \approx 0.05 \text{ m}$
- $\Delta Z \approx -0.18 \text{ m}$
- Rotazioni $\sim 0.001''$
- $s \sim 0.1 \text{ ppb}$

15.4 Convergenza e Riduzione delle Distanze

15.4.1 Convergenza Meridiana

In proiezione UTM/Gauss:

$$\gamma = \arctan((\tan \varphi \sin \Delta\lambda) / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2})$$

Approssimazione (primo ordine): $\gamma \approx \Delta\lambda \sin \varphi_m$

dove φ_m è latitudine media.

15.4.2 Riduzione alla Corda

Distanza geodetica s vs distanza in proiezione d :

$$d = s \cdot k_m$$

dove k_m è il fattore di scala medio lungo la geodetica.

Per UTM: $k_m \approx k_0 [1 + (E_m - E_0)^2 / (2R^2)]$

dove E_m è l'Est medio, R il raggio terrestre medio.

Esempio pratico:

- Distanza geodetica: 10000.00 m
- Al centro fuso UTM: $k = 0.9996$
- Distanza in carta: 9996.00 m
- Differenza: 4 m (significativa per lavori di precisione!)

DENSITÀ E DERIVAZIONE

16.1 Il Problema della Derivazione di Misure

Domanda geometrica: Data una misura μ su $\mathbb{R}^n$, esiste una "densità" locale? Cioè, per ogni punto x , ha senso definire:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu(B(x,r)) / \lambda(B(x,r))$$

dove $B(x,r)$ è la palla di raggio r centrata in x ?

Questo limite, se esiste, sarebbe la "concentrazione" della misura in x .

16.2 Punti di Densità

Definizione 16.1: Sia μ misura finita su $\mathbb{R}^n$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è un **punto di densità** per E se:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu(E \cap B(x, r)) / \mu(B(x, r)) = 1$$

Interpretazione: "Localmente, E riempie tutto lo spazio vicino a x"

Teorema 16.1 (Lebesgue): Per la misura di Lebesgue λ su $\mathbb{R}^n$, quasi ogni punto di E è punto di densità per E. Cioè:

$$\lambda(\{x \in E : x \text{ non è punto di densità per } E\}) = 0$$

Conseguenza: L'insieme E è "regolare" q.o.: la maggior parte dei suoi punti sono "circondati" da E.

16.3 Teorema di Derivazione di Lebesgue

Teorema 16.2 (Derivazione di Lebesgue): Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora per λ -q.o. $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (1/\lambda(B(x, r))) \int_{B(x, r)} f \, d\lambda = f(x)$$

Interpretazione: La media integrale di f su palle piccole converge al valore puntuale.

Corollario 16.1: Se $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$ per $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $F'(x) = f(x)$ per λ -q.o. x.

Questo estende il Teorema Fondamentale del Calcolo a funzioni L^1 !

16.4 Insiemi di Vitali

Definizione 16.2: Una famiglia V di insiemi in $\mathbb{R}^n$ **copre E secondo Vitali** se:

- Ogni $x \in E$ è contenuto in arbitrariamente piccoli insiemi di V
- Gli insiemi in V hanno "forma controllata" (es. palle, cubi)

Teorema 16.3 (Ricoprimento di Vitali): Se V copre E secondo Vitali e $\mu(E) < \infty$, esiste una sottofamiglia numerabile disgiunta $\{V_i\} \subset V$ tale che:

$$\mu(E \setminus \bigcup_i V_i) = 0$$

Applicazione: Dimostrazione del Teorema di Derivazione di Lebesgue.

INTEGRAZIONE SU VARIETÀ

17.1 Forme Differenziali: Richiami

Una k-forma differenziale su $\mathbb{R}^n$ è:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Proprietà fondamentale: L'integrale $\int_M \omega$ è invariante per riparametrizzazione (se orientazione preservata).

17.2 Integrazione di n-Forme su Varietà n-Dimensionali

Teorema 17.1: Sia M varietà orientabile n -dimensionale e ω una n -forma con supporto compatto. Allora:

$$\int_M \omega$$

è ben definito e indipendente dalle carte locali (se compatibili con orientazione).

Caso speciale - Elemento di Volume:

Su (M, g) Riemanniana, la n -forma volume è:

$$dV_g = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

dove $|g| = \det[g_{ij}]$.

Volume di M :

$$\text{Vol}(M) = \int_M dV_g$$

17.3 Teorema di Stokes Generalizzato

Teorema 17.2 (Stokes): Sia M varietà orientabile n -dimensionale con bordo ∂M , e ω una $(n-1)$ -forma di classe C^1 . Allora:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

dove $d\omega$ è il differenziale esterno di ω .

Casi speciali:

- $n=1$: Teorema Fondamentale del Calcolo
- $n=2$: Teorema di Green
- $n=3$, 2-forme: Teorema della divergenza
- $n=3$, 1-forme: Teorema del rotore (Stokes classico)

17.4 Calcolo dell'Area di Superfici

Formula generale: Per superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizzata da $r(u,v)$:

$$\text{Area}(S) = \iint_D \|r_u \times r_v\| du dv$$

dove D è il dominio parametrico.

Collegamento con prima forma fondamentale:

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

Esempio 17.1 (Ellissoide di rivoluzione):

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$$

Parametrizzazione sferoidale:

- $x = a \sin \theta \cos \varphi$
- $y = a \sin \theta \sin \varphi$
- $z = b \cos \theta$

$$\text{Area} = 2\pi [a^2 + (ab/e) \arcsin(e)]$$

dove $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ è l'eccentricità.

Per la Terra ($a \approx 6378 \text{ km}$, $b \approx 6357 \text{ km}$):

$$A \approx 510 \times 10^6 \text{ km}^2$$

APPLICAZIONI GEODETICHE AVANZATE

18.1 Sistemi di Posizionamento Globale (GNSS)

18.1.1 Principi del GPS

Idea base: Trilaterazione da satelliti con posizione nota.

Satellite i trasmette:

- Posizione (X_i, Y_i, Z_i) al tempo t
- Tempo di trasmissione τ_i

Ricevitore misura tempo di arrivo t_r .

Equazione pseudorange:

$$\rho_i = c(t_r - \tau_i) = \sqrt{[(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2]} + c \cdot \delta t$$

dove:

- c = velocità della luce
- δt = errore orologio ricevitore (incognita!)

Sistema da risolvere: 4 incognite ($X, Y, Z, \delta t$), servono ≥ 4 satelliti.

18.1.2 Correzioni Differenziali (DGPS)

Stazione di riferimento (posizione nota) calcola:

$$\Delta \rho_i = \rho_i^{\text{misurato}} - \rho_i^{\text{teorico}}$$

Trasmette correzioni $\Delta \rho_i$. Utente applica:

$$\rho_i^{\text{corretto}} = \rho_i^{\text{misurato}} - \Delta\rho_i$$

Precisione:

- GPS standard: 5-10 m
- DGPS: 1-3 m
- RTK (Real-Time Kinematic): 1-2 cm

18.2 Geoid e Ondulazioni

18.2.1 Modelli del Geoide

EGM96: Earth Gravitational Model 1996

- Sviluppo in armoniche sferiche fino a grado 360
- Risoluzione ~55 km

EGM2008:

- Grado 2190
- Risoluzione ~9 km
- Accuratezza ~15 cm in aree ben survegiate

18.2.2 Calcolo dell'Ondulazione

L'ondulazione del geoide N è:

$$N(\varphi, \lambda) = h - H$$

dove:

- h = quota ellissoidica (GPS)
- H = quota ortometrica (livellazione)

Formula sferica approssimata:

$$N \approx \sum_{n=2}^{n_{\text{max}}} \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\sin \varphi) (a/r)^{n+1}$$

dove:

- C_{nm}, S_{nm} = coefficienti armonici
- P_{nm} = funzioni di Legendre associate
- a = raggio terrestre medio

18.3 Reti Geodetiche e Compensazione

18.3.1 Osservazioni Ridondanti

In una rete geodetica:

- n punti incogniti $\rightarrow 2n$ o $3n$ coordinate incognite
- m osservazioni (distanze, angoli, ecc.)

Tipicamente $m >$ numero incognite (sistema sovradeterminato).

18.3.2 Minimi Quadrati

Modello linearizzato:

$$Ax = b + v$$

dove:

- A = matrice design (derivate parziali)
- x = correzioni alle coordinate approssimate
- b = termini noti (differenze osservato-calcolato)
- v = residui (errori)

Soluzione normale:

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P b$$

dove P = matrice pesi (inversa della matrice varianza-covarianza delle osservazioni).

Varianza a posteriori:

$$\sigma_0^2 = (v^T P v) / (m - n)$$

Ellisse di confidenza: Per punto (x, y) , la matrice varianza-covarianza:

$$\Sigma = \sigma_0^2 [(A^T P A)^{-1}]_{2 \times 2 \text{ relativa a } (x, y)}$$

Gli autovalori di Σ danno i semiassi dell'ellisse di errore.

18.4 Trasformazioni Conformi Locali

18.4.1 Trasformazione di Gauss-Boaga (Italia)

Sistema cartografico italiano storico:

Fuso Ovest: $\lambda_0 = 9^\circ \text{ E}$

Fuso Est: $\lambda_0 = 15^\circ \text{ E}$

Proiezione: Gauss (Mercatore Trasversa)

Ellissoide: Internazionale 1924 (Hayford)

Parametri:

- $a = 6378388 \text{ m}$
- $1/f = 297$
- Falsa origine Est: 1500000 m (Ovest), 2520000 m (Est)

18.4.2 Passaggio Gauss-Boaga → WGS84/UTM

Procedura:

1. GB (x,y) → Geografiche Hayford (φ_H, λ_H)
2. Hayford → Geografiche WGS84 (trasformazione datum)
3. WGS84 (φ, λ) → UTM (E, N)

Trasformazione datum Italia:

$$\Delta\varphi \approx -0.105''$$

$$\Delta\lambda \approx +0.168''$$

$$\Delta h \approx +50 \text{ m}$$

(valori medi, variano localmente)

TEORIA ERGODICA E SISTEMI DINAMICI

19.1 Sistemi Dinamici Misurabili

Definizione 19.1: Un sistema dinamico misurabile è una quadrupla (X, F, μ, T) dove:

- (X, F, μ) è spazio di probabilità ($\mu(X) = 1$)
- $T: X \rightarrow X$ è trasformazione misurabile che preserva la misura:

$$\mu(T^{-1}(E)) = \mu(E) \text{ per ogni } E \in F$$

Interpretazione: T rappresenta l'evoluzione temporale; preservare la misura significa che la "distribuzione statistica" rimane invariante.

19.2 Ricorrenza di Poincaré

Teorema 19.1 (Poincaré): Se $\mu(X) < \infty$ e T preserva μ , allora per ogni $E \in F$ con $\mu(E) > 0$:

$$\mu(\{x \in E : T^n(x) \in E \text{ per infiniti } n\}) = \mu(E)$$

Interpretazione: Quasi ogni punto di E ritorna in E infinite volte.

Applicazione cosmologica: Ricorrenza degli stati in sistemi isolati (controverso per termodinamica).

19.3 Teorema Ergodico di Birkhoff

Definizione 19.2: T è **ergodica** se ogni $E \in F$ con $T^{-1}(E) = E$ soddisfa $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$.

Interpretazione: Non esistono sottoinsiemi invarianti non banali; il sistema è "indecomponibile".

Teorema 19.2 (Birkhoff): Se T è ergodica e $f \in L^1(\mu)$, allora per μ -q.o. x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \int f d\mu$$

Interpretazione: La media temporale uguaglia la media spaziale (rispetto a μ).

Applicazione fisica: Giustificazione dell'equilibrio statistico in meccanica statistica.

19.4 Entropia e Informazione

Definizione 19.3 (Entropia di Shannon): Per partizione finita $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$ di X :

$$H(\alpha) = -\sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i)$$

Entropia di Kolmogorov-Sinai:

$$h(T) = \sup_{\alpha} h(T, \alpha)$$

dove $h(T, \alpha)$ è il tasso di crescita dell'entropia sotto iterazioni di T .

Teorema 19.3: Se $h(T) > 0$, il sistema è caotico (comportamento imprevedibile a lungo termine).